MATEMÁTICA I

PROFESOR: AQUILINO MIRANDA

REPÚBLICA DE PANAMÁ

UNIVERSIDAD SANTA MARÍA LA ANTIGUA

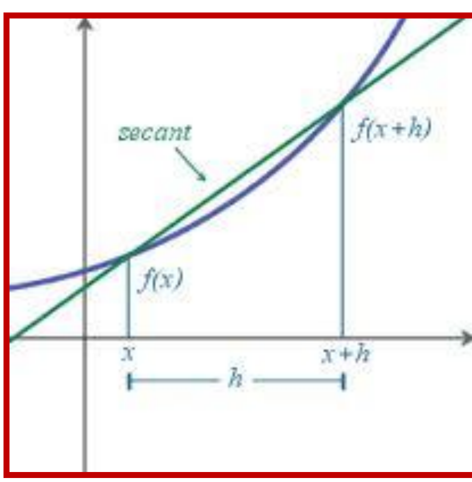
FACULTAD DE INGENIERÍA

ESCUELA DE INGENIERÍA INDUSTRIAL ADMINISTRATIVA

MÓDULO INSTRUCCIONAL DE MATEMÁTICA 1

PROFESOR: AQUILINO MIRANDA

2015



CONTENIDO DEL CURSO

UNIDAD DE REPASO (TEORÍA DE LAS FUNCIONES REALES Y BASES DEL ÁLGEBRA PARA EL CÁLCULO)

UNIDAD DE APRENDIZAJE #1 (LÍMITE DE UNA FUNCIÓN)

1.1 Concepto.
1.2 Definiciones.
1.3 Concepto de límite intuitivamente.
1.4 Propiedades y teoremas de los límites.
1.5 Cálculo de límites utilizando los teoremas.
1.6 Cálculo de los límites con cocientes indeterminados.
1.7 Cálculo de los límites cuando x tiende a infinito.

UNIDAD DE APRENDIZAJE #2 (LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN)

2.1 Concepto.
2.2 Teoremas.
2.3 Derivadas de funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales.
2.4 Regla de la cadena.
2.5 Derivadas de orden superior.
2.6 Derivación implícita.
2.7 Pasos para el cálculo de derivadas implícitamente.
2.8 Rectas tangentes.
2.9 Teorema de valor intermedio.
2.10 Ceros de una función.
2.11 Máximos y mínimos de una función.
2.12 Funciones crecientes y decrecientes.
2.13 Criterio de la primera derivada.
2.14 Concavidad de una función.

UNIDAD DE APRENDIZAJE #3 (LA INTEGRAL INDEFINIDA)

3. La integral indefinida.
3.1 Fórmulas fundamentales de integración.
3.2 Cálculo de primitivas.
3.3 Integración por cambio de variable o sustitución simple.
3.4 Teorema de cambio de variable.

INTRODUCCIÓN

El cálculo es considerado como el primer gran logro de la matemática moderna; con su aplicación se han podido lograr descubrimientos científicos importantes en los siglos pasados. La ciencia y la tecnología recurren al cálculo para expresar leyes físicas en términos matemáticos precisos y para estudiar las consecuencias de estas leyes. Desde su desarrollo hasta el presente, el cálculo ha sido el principal lenguaje para cuantificar en la ciencia y la tecnología y provee las herramientas matemáticas que necesita un estudiante de ingeniería para continuar sus conocimientos y entender los adelantos científicos.

El presente módulo instruccional está estructurado en tres unidades. Cada unidad está desarrollada con una gran variedad de ejemplos, ilustraciones y diversas actividades de aprendizaje.

El módulo se caracteriza por una presentación clara de cada tema, de fácil comprensión mediante el empleo de un vocabulario sencillo. Dicho módulo es un instrumento válido para el desarrollo de las potencialidades de los participantes de la carrera de ingeniería de la USMA, promoviendo el desarrollo intelectual y el perfeccionamiento de la capacidad analítica de cada estudiante, mediante la solución de problemas matemáticos.

MENSAJE AL PARTICIPANTE

Estimado(a) participante, bienvenido al segundo cuatrimestre del 2015. Te exhorto a que durante este periodo pongas todo tu esfuerzo, capacidad e interés para el logro satisfactorio de los objetivos propuestos y de esta forma puedas perfeccionar tus capacidades de análisis y razonamiento que te ayudarán a ser un mejor individuo y futuro profesional.

<u>Algunas sugerencias…</u>

Leer un texto de matemática requiere de mucha concentración.

El aprendizaje de la matemática se basa en el dominio de los conceptos teóricos y el desarrollo de los problemas, aplicando los conceptos teóricos con la finalidad de promover las capacidades de análisis y razonamiento.

Cuando tengas dudas, pregunta siempre al facilitador o a un compañero.

UNIDAD DE REPASO GENERAL DE LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES REALES Y BASES DEL ÁLGEBRA PARA EL CÁLCULO

Objetivo: Recordar y aplicar las generalidades de las funciones reales: dominio, codominio, gráficas y operaciones fundamentales en la solución de problemas. Aplicar las bases del álgebra en la solución de problemas del cálculo.

Actividad previa: Responde las siguientes interrogantes.

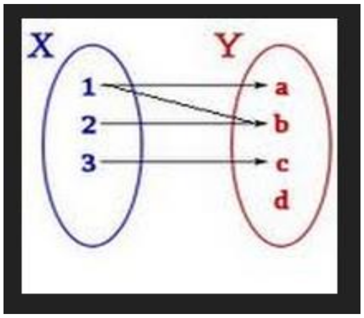
¿Qué es para ti una función?, ¿Sabes cómo se grafican las funciones?

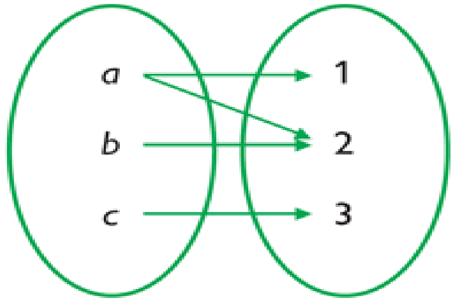
Actividad lógica:

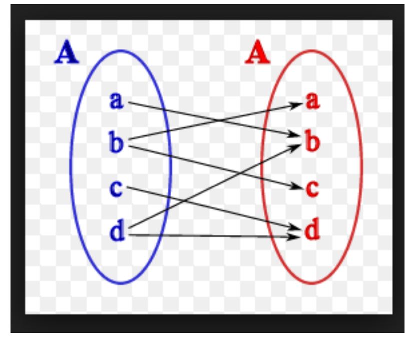
Carlos es un estudiante que deseaba ir a un evento deportivo. Al llegar a la entrada había tres personas esperando para entrar: Luis, Ana y José. El guardia de seguridad hacía una pregunta y dependiendo de la respuesta si era correcta o incorrecta la persona entraba o no. El guardia le preguntó a Luis 18 y él respondió 9 y pudo entrar, a Ana le preguntó 14 y ella respondió 7 y pudo entrar, a José le preguntó 8 y él respondió 4 y pudo entrar y por último a Carlos le preguntó 6 y él respondió 3 y no pudo entrar. ¿Cuál debió ser la respuesta de Carlos para poder entrar al evento?

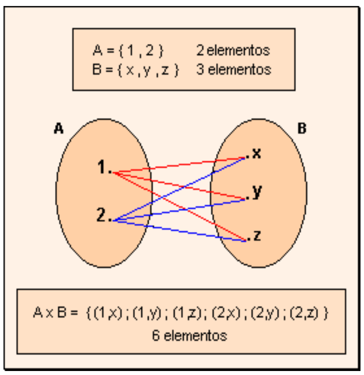
Ahora podemos iniciar con el desarrollo de la unidad de repaso…

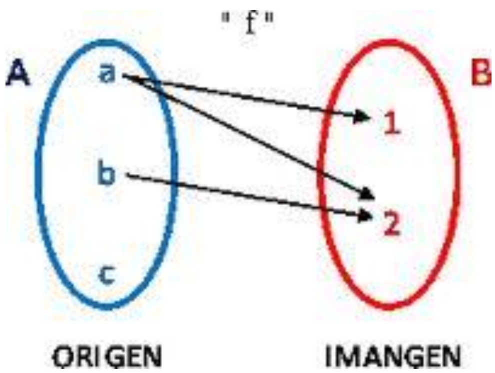
P.1 ***concepto de relación:*** Sean A y B dos conjuntos no vacíos, diremos que f es una relación de A en B, si f es una correspondencia entre los elementos de A (Dominio) y B (Codominio o Rango), de manera que a cada elemento del Dominio le corresponde uno o más elementos del Recorrido o Rango. Por ejemplo, en los números naturales, podemos hablar de la relación *ser menor o igual que.*

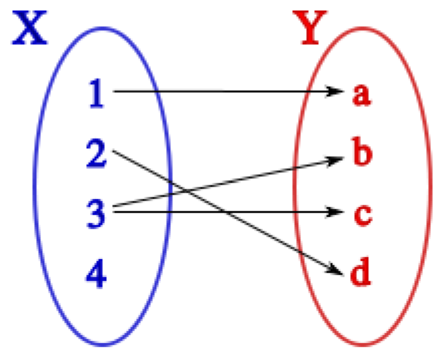




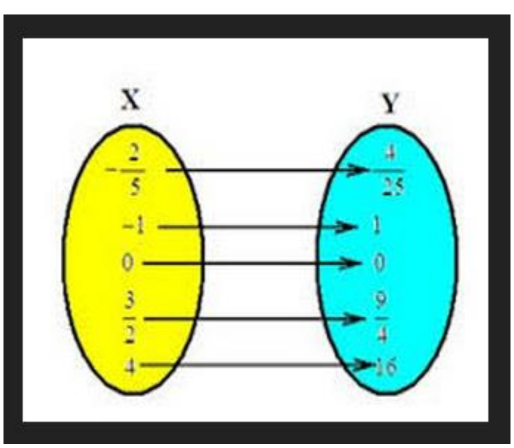


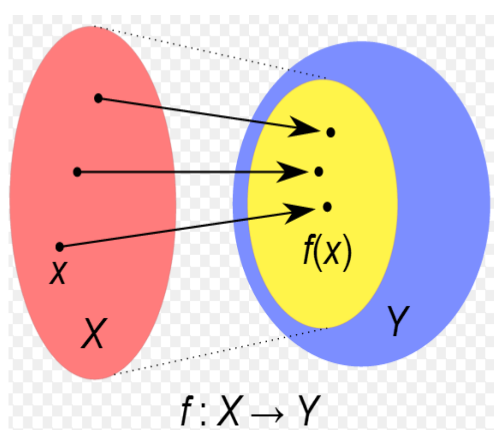


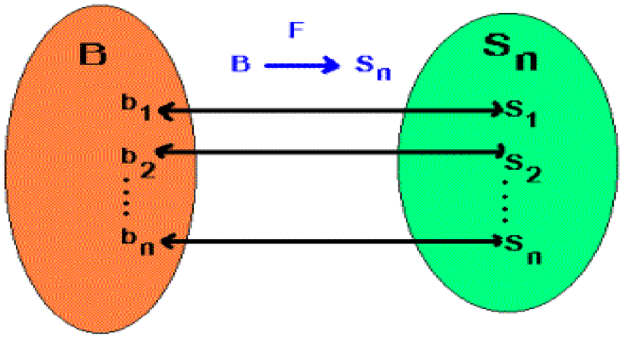


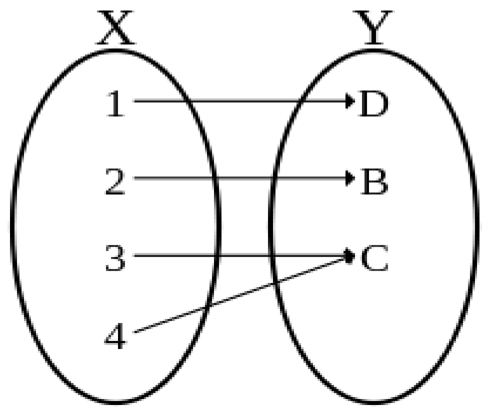


P.2 *Concepto de función:* es una relación a la cual se añade la condición de que a cada valor del Dominio le corresponde **uno y sólo un valor** del Recorrido. Dar una función es establecer una forma de hacer corresponder un valor y sólo uno a cada valor de la variable. Se expresa de la forma $y = f(x)$ donde x es la variable independiente, y (y) es la variable dependiente y f es la función. El campo de variabilidad de la (x) se llama dominio o campo y al de (y) se le llama codominio, recorrido o rango. Toda función se puede representar por un conjunto de puntos en el plano cartesiano, que se llama gráfica de la función. Dicha gráfica está formada por todos los puntos de coordenadas $(x, f(x))$



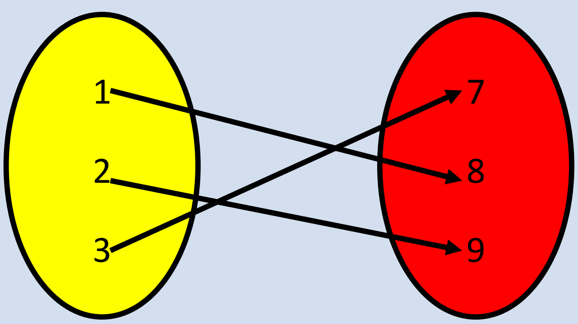
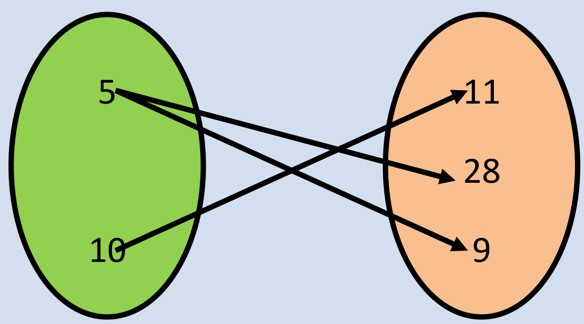
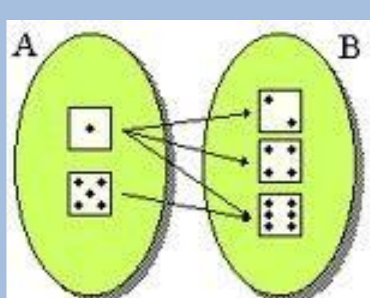
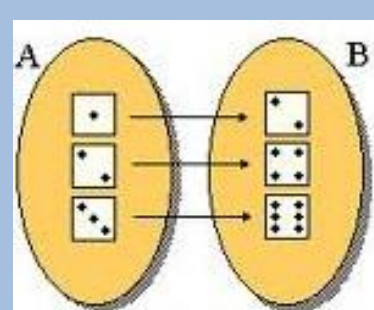


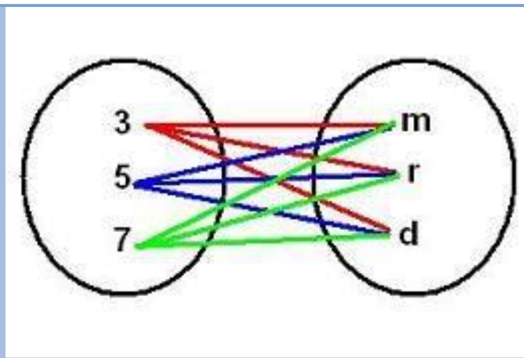




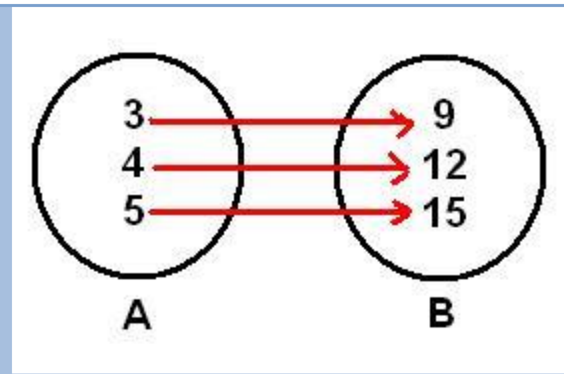
P.3 Notación de función: La notación $y = f(x)$ indica que y es una función de x

Evaluación Formativa: Identifica si los siguientes diagramas corresponden a una función o simplemente a una relación.

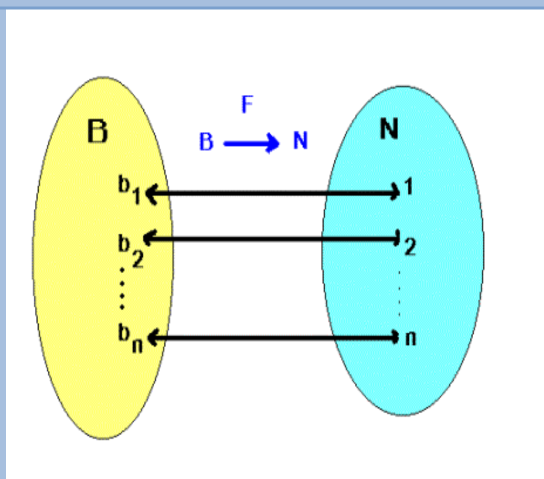
DIAGRAMAS	**DIAGRAMAS**
 ____________________	 ____________________
 ____________________	 ____________________



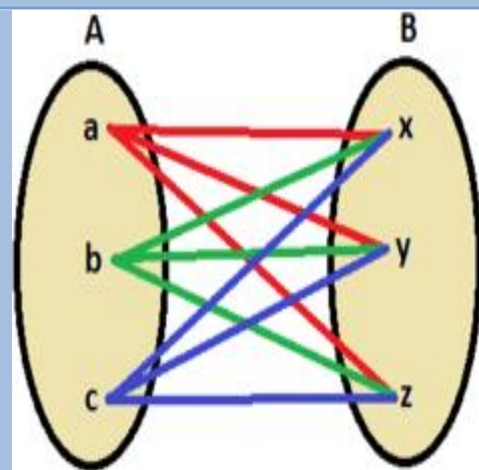
____



____



____



____

Construya un diagrama que corresponda a una relación cualquiera

Construya un diagrama que corresponda a una función

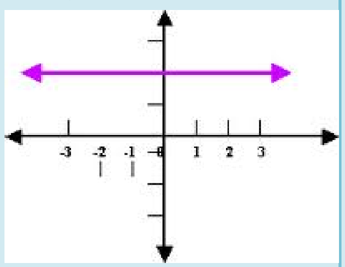
P.4 ***Dominio de una función:*** Sea f una función de A en B. entonces, $D_f = \{x \in A / \ f(x) \quad existe\}$

P.5 ***Codominio de una función:*** Sea f una función de A en B. entonces, $R_f = \{y \in B / \exists x \in A / \ y = f(x)\}$

P.6 ***Tipos de funciones:*** Existen diversos tipos de funciones las cuales definimos a continuación.

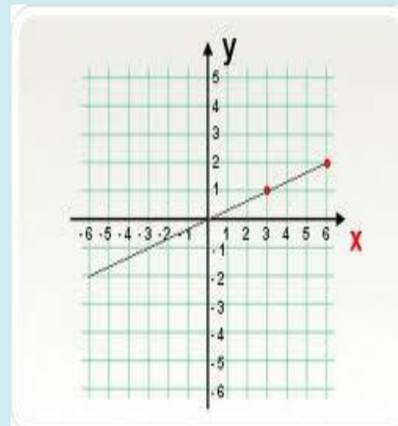
P.6.1 Función Constante: es aquella en donde cada valor del dominio siempre tendrá la misma imagen. Es decir,

$f(x)=C, \quad C\in R$



Su dominio es el conjunto de los números reales y su recorrido es la constante C.

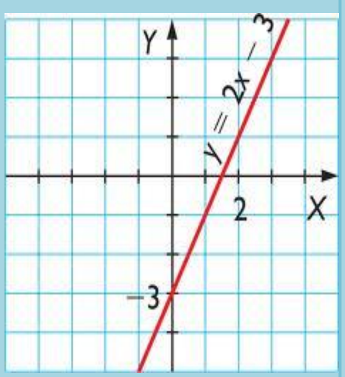
P.6.2 Función Idéntica: Se denomina función identidad, porque a cada número del eje de abscisas le corresponde el mismo número en el eje de ordenadas.



Se representa de la forma $f(x)=x$ su dominio y codominio incluyen todos los números reales.

P.6.3 Función lineal: Una función es lineal si es de la forma

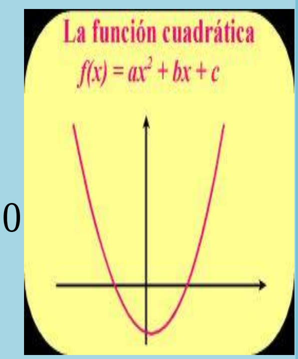
$f\left(x\right)=mx+b$



Donde m y b son números o constantes, $m\neq 0$ su dominio y codominio incluyen todos los números reales.

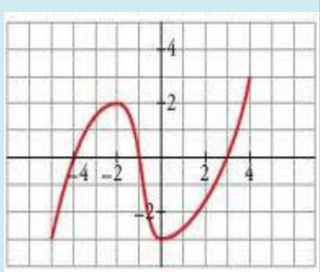
P.6.4 Función cuadrática: las funciones cuadráticas son aquellas que se escriben de la siguiente forma:

$f\left(x\right)=ax^2+bx+c, \quad a\neq 0$



su dominio incluye todos los números reales, el codominio depende del problema.

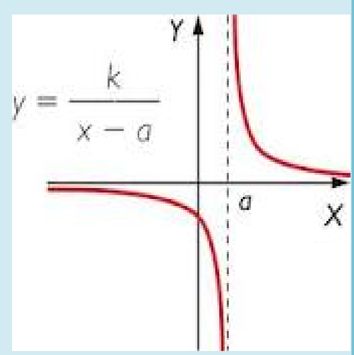
P.6.5 Funciones polinomiales: Las funciones polinómicas son funciones expresadas mediante un polinomio de su variable.



$f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$

Su dominio y codominio incluyen todos los números reales.

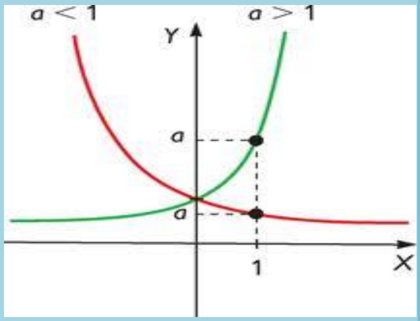
P.6.6 Función Cociente: dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)\neq 0$ la función cociente es la que se expresa de la forma:



$h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x)\neq 0$

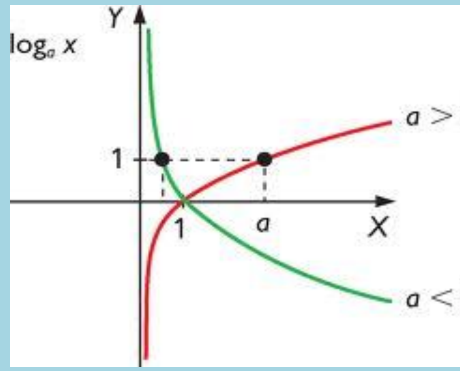
El dominio de la función incluye todos los números reales excepto aquel o aquellos valores donde el denominador se hace cero y su recorrido excluye la imagen del o los valores que quedan fuera del dominio y esto se obtiene despejando la variable dependiente en término de la independiente.

P.6.7 Función exponencial: Se llaman así a todas aquellas funciones de la forma $f(x) = b^x$, en donde la base b, es una constante y el exponente la variable independiente.

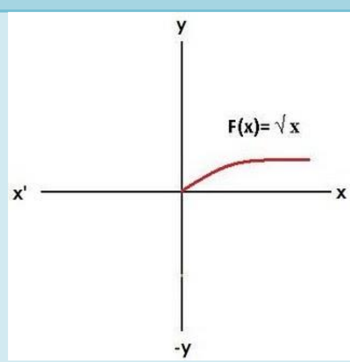


La definición de función exponencial exige que la base sea siempre positiva y diferente de uno $(b > 0,\ \ b \neq 1)$. La condición que b sea diferente de uno se impone, debido a que al reemplazar a b por 1, la función b^x se transforma en la función constante $f(x) = 1$. La base no puede ser negativa porque funciones de la forma $f(x) = (-9)^{1/2}$ no tendrían sentido en los números reales. En la exponencial el dominio son siempre todos los reales el codominio (la imagen) son los valores q van desde la asíntota (horizontal) hacia el lado que vaya la función.

P.6.8 Función logarítmica: Se llama función logaritmo de base (a), a la función $f(x) = \log_a x$, La función logaritmo más utilizada es la que tiene por base al número (e), de hecho cuando se habla de la función logaritmo sin especificar la base, es porque se trata del número (e) el cual es la base de los logaritmos naturales. Dado que la función exponencial es la inversa de la función logarítmica, el rango de la función logarítmica es el dominio de la función exponencial de base (e), que es el conjunto de todos los números reales. El dominio de la función logarítmica es el rango de la función exponencial de base (e), dada por el intervalo (0, + infinito).



P.6.9 Función trascendental: Una función trascendente es una función que no puede ser representada por una ecuación polinómica. Es

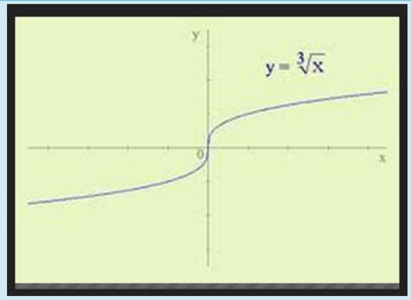


P.6.10 Función trigonométrica: Una función trigonométrica, también llamada circular, es aquella que se define por la aplicación de una razón trigonométrica a los distintos valores de la variable independiente, que ha de estar expresada en radianes.

Existen seis clases de funciones trigonométricas: seno y su inversa, la

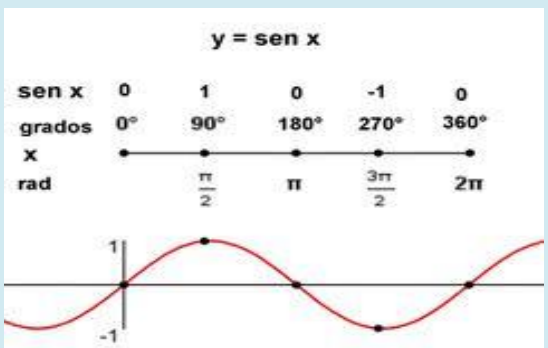
aquella en la que la variable está involucrada dentro de una función logarítmica, exponencial o trigonométrica.	cosecante; coseno y su inversa, la secante; y tangente y su inversa, la cotangente.

P.6.11 *Función irracional:* una función que contenga la raíz indicada de una expresión algebraica se llama irracional.



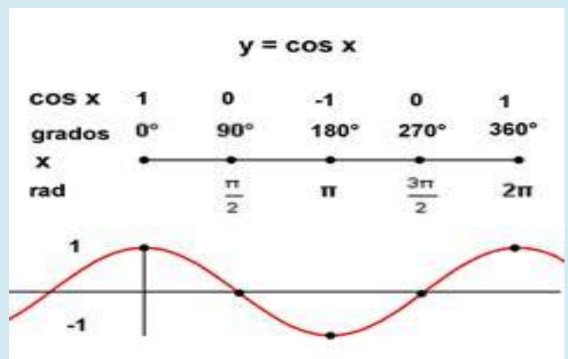
GRÁFICAS, DOMINIO Y CODOMINIO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$f(x) = sen(x)$$



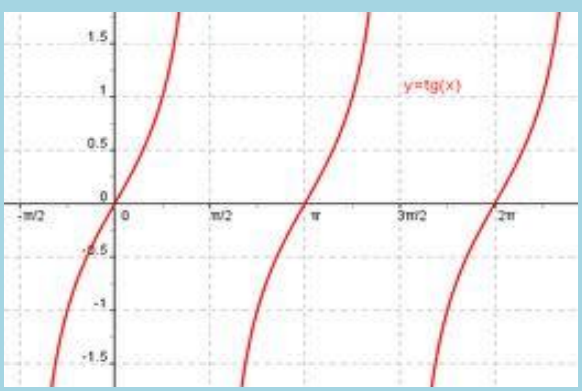
Dominio: todos los números reales.
Recorrido: $[-1,1]$

$$f(x) = \cos(x)$$



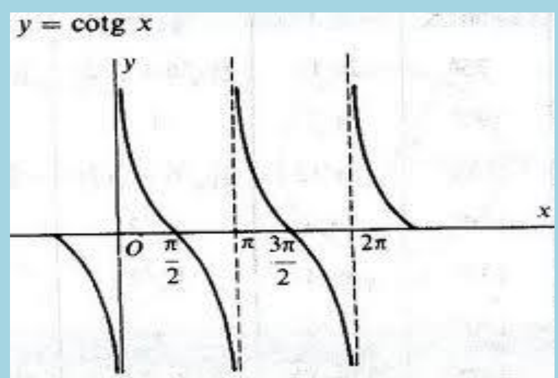
Dominio: todos los números reales.
Recorrido: $[-1,1]$

$$f(x) = \tan(x)$$

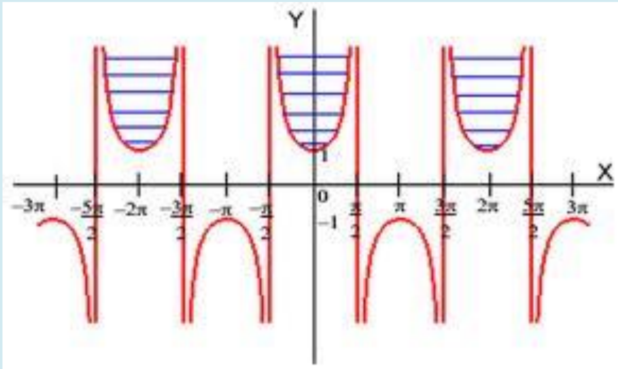
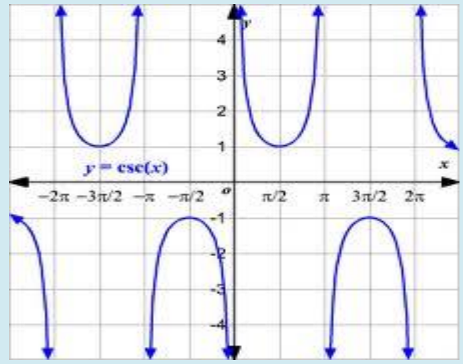


Dominio: R - {múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$}
Recorrido: todos los números reales.

$$f(x) = \cot(x)$$



Dominio: R - {múltiplos de π}
Recorrido: todos los números reales.

$f(x)=\sec(x)$	$f(x)=\csc(x)$
	
Dominio: R - {múltiplos impares de pi/2} Rango: (-infinito, -1] U [1, +infinito)	Dominio: R - {múltiplos de pi} Rango: (-infinito, -1] U [1, +infinito)

Evaluación Formativa: Analiza la definición, asóciala con el término correspondiente y localiza dicho término en la sopa de letras.

Funciones

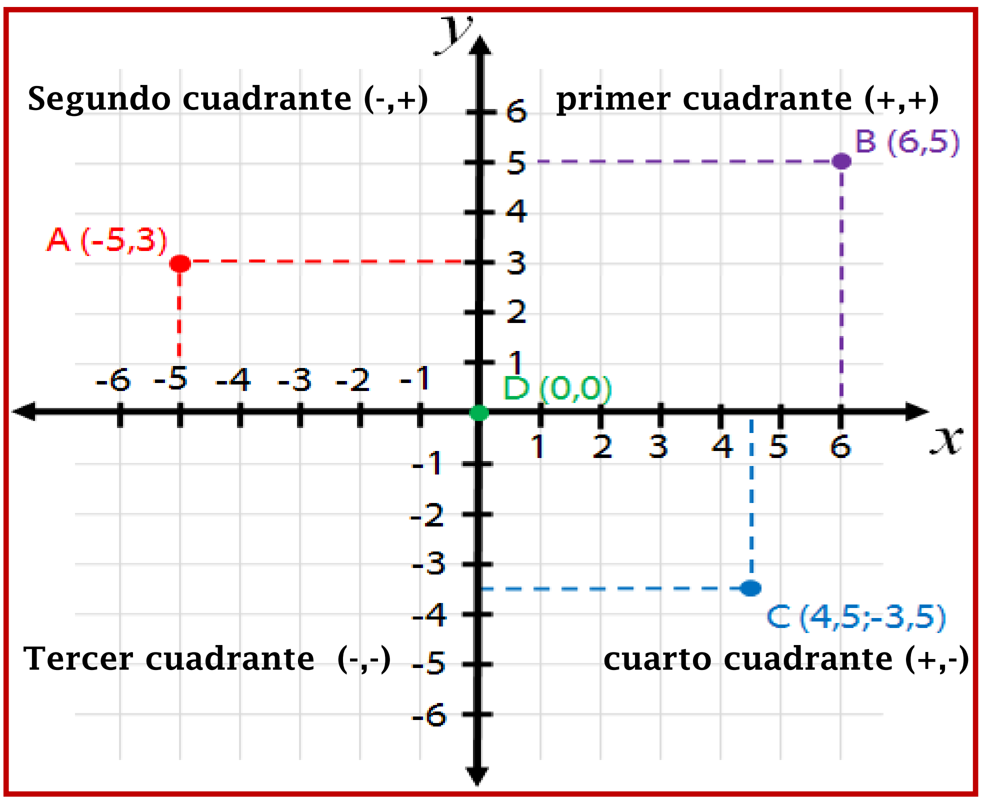
H	W	N	V	Ñ	H	A	Z	K	J	W	J	J	K	M	L	W	P	J	O
Z	F	E	Ñ	O	I	Y	C	C	S	X	P	U	R	T	A	Q	I	X	P
S	V	Q	L	N	A	L	T	I	B	B	W	O	J	X	D	C	P	Q	S
N	X	B	M	A	A	C	Z	V	M	I	X	U	V	U	H	U	R	Ñ	E
R	H	U	U	E	G	M	I	Ñ	I	T	J	N	Ñ	K	O	W	S	N	K
C	H	O	N	U	X	I	V	T	W	S	I	Ñ	P	P	Q	B	H	F	Y
L	U	I	H	Z	Y	I	T	N	N	Z	N	R	G	S	U	U	H	A	Ñ
F	L	A	L	A	T	N	E	D	N	E	C	S	A	R	T	X	Y	G	Y
H	T	I	D	Ñ	L	Z	M	Ñ	C	C	D	A	K	G	X	V	E	R	H
U	X	H	T	R	E	P	Y	C	K	S	K	I	Q	P	O	T	K	U	C
E	X	D	W	Z	A	S	X	K	S	N	Y	C	Z	S	U	L	R	Z	U
A	P	B	A	I	U	T	N	X	H	Ñ	R	W	W	W	P	G	W	Y	Ñ
M	T	L	F	U	N	O	I	H	C	A	C	I	M	O	N	I	L	O	P
M	T	O	D	N	X	V	Ñ	C	W	X	K	H	C	W	V	G	Q	I	Z
E	T	N	E	I	C	O	C	T	A	T	H	J	L	J	P	D	Ñ	O	I
F	A	A	M	S	P	Y	Ñ	E	T	N	A	T	S	N	O	C	Ñ	Y	G
G	Y	G	S	T	R	I	G	O	N	O	M	E	T	R	I	C	A	S	N
H	E	X	P	O	N	E	N	C	I	A	L	C	Y	F	V	A	V	O	O
A	Z	Y	H	A	Q	I	X	W	K	B	G	A	R	Z	G	J	R	G	I
I	S	T	C	Q	X	E	J	K	U	H	B	Y	L	I	K	M	F	F	H

- funciones de la forma $f(x)=b^x$
- cada valor del dominio siempre tendrá la misma imagen.
- porque a cada número del eje de abscisas le corresponde el mismo número en el eje de ordenadas.
- es aquella que se define por la aplicación de una razón trigonométrica a los distintos valores de la variable independiente.

- función que no puede ser representada por una ecuación polinómica.
  - $f(x)=\log_a x, \quad a>0, \quad a\neq 1$
  - $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x)\neq 0$
  - $f\left(x\right)=mx+b$
  - $f(x)=a_n x^n+\ldots+a_1 x+a_0$
  - $f\left(x\right)=ax^2+bx+c, \quad a\neq 0$

P.7 *Gráficas de las funciones lineales:* Las gráficas de las funciones lineales siempre son líneas rectas y se construyen en el plano cartesiano. Para graficar funciones lineales se construye una tabla, donde cada valor de x que es la variables independiente, generar un valor o imagen para y o f(x) que es la variable dependiente.

PLANO CARTESIANO

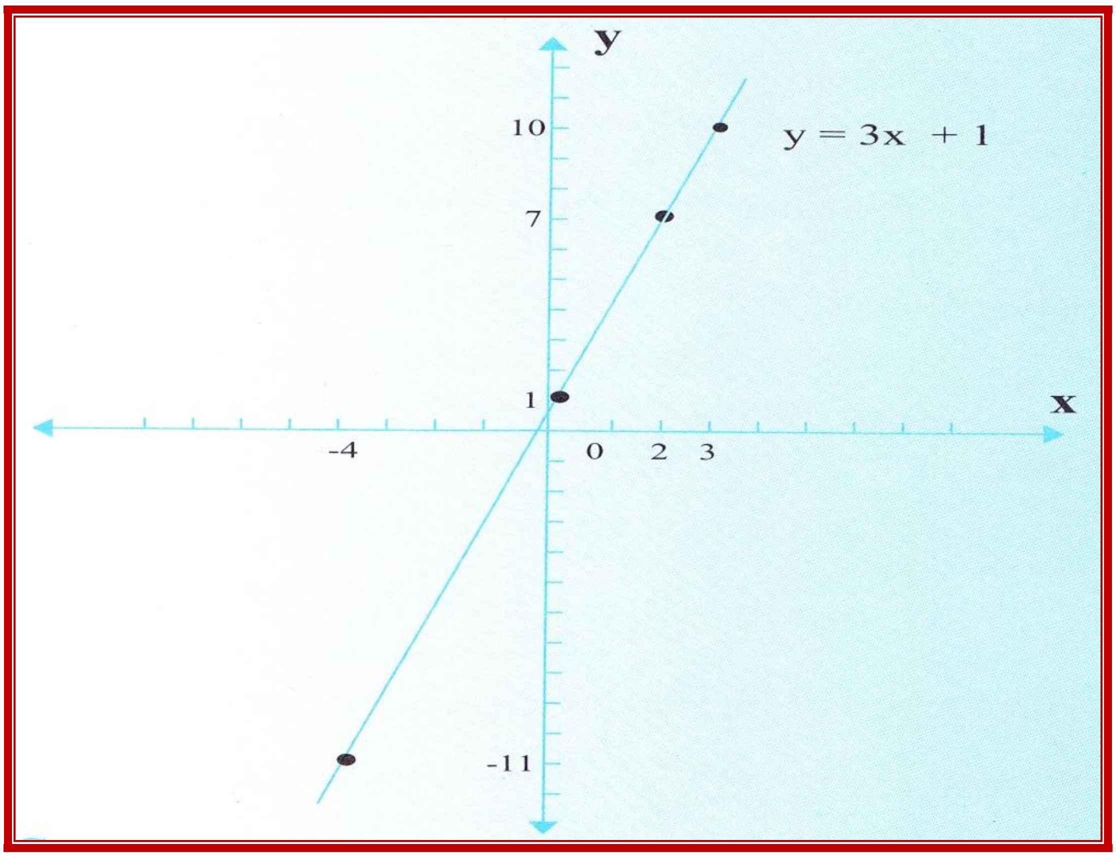


Para localizar una punto en el plano cartesiano, se acostumbra a ubicar primeramente el valor de x, posteriormente se ubica el valor de y.

Ejemplo: Graficar la función $f(x) = 3x + 1$ Para lo cual asignamos algunos valores para la variable x, donde cada valor de x generará un valor para f(x).

$$x = 0, \quad f(0) = 3(0) + 1 = 1$$
$$x = 2, \quad f(2) = 3(2) + 1 = 6 + 1 = 7$$
$$x = 3, \quad f(3) = 3(3) + 1 = 9 + 1 = 10$$
$$x = -4, \quad f(-4) = 3(-4) + 1 = -12 + 1 = -11$$

Luego se ubican todos los pares de puntos en el plano cartesiano, dando como resultado la siguiente gráfica:



Evaluación Formativa: grafica las siguientes funciones, determina su dominio y codominio. $f(x) = 4x - 3$ $\quad f(x) = -3x + 4$

P.8 Funciones cuadráticas: las funciones cuadráticas son aquellas que se escriben de la siguiente forma: $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$

Gráfica de funciones cuadráticas: a la gráfica de una función cuadrática se le conoce como parábola, de igual manera se grafica en el plano cartesiano.

Para graficar una función cuadrática, se necesita encontrar el **vértice** de la parábola.

Dada a función cuadrática $f(x)=ax^2+bx+c, \quad a\neq 0$ el vértice $V(x,y)$ se obtiene de la siguiente forma: $x=\dfrac{-b}{2a}$ $\qquad y=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

<u>Ejemplo:</u> Graficar $f(x)=x^2-2x-3$

Calculemos primero el vértice, para este caso tenemos que $a=1, \quad b=-2, \quad c=-3$

Luego, $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-(-2)}{2(1)}=\dfrac{2}{2}=1$

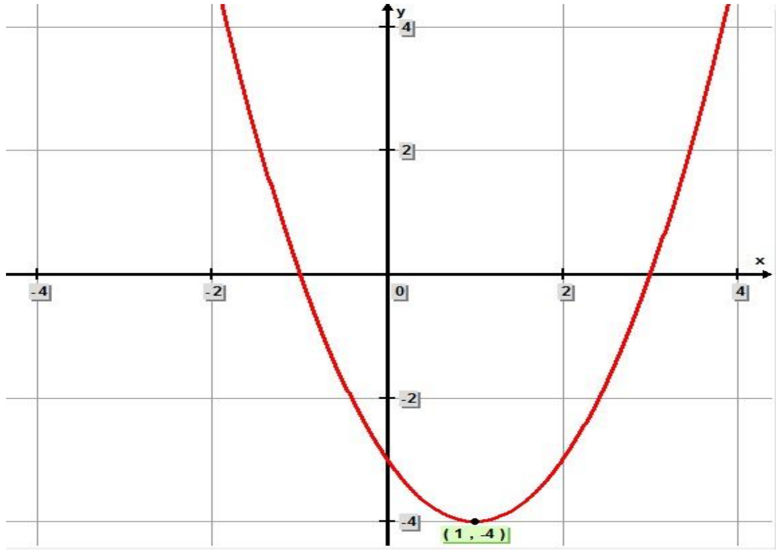
$$y=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4(1)(-3)-(-2)^2}{4(1)}=\frac{-12-4}{4}=\frac{-16}{4}=-4$$

De donde el vértice es $(1,-4)$

Luego asignamos algunos valores para la variable x, donde cada valor de x generará un valor para f(x).

$$x=-2, \quad f(-2)=(-2)^2-2(-2)-3=4+4-3=5$$
$$x=-1, \quad f(-1)=(-1)^2-2(-1)-3=1+2-3=0$$
$$x=0, \quad f(0)=(0)^2-2(0)-3=0+0-3=-3$$
$$x=1, \quad f(1)=(1)^2-2(1)-3=1-2-3=-4$$
$$x=2, \quad f(2)=(2)^2-2(2)-3=4-4-3=-3$$
$$x=3, \quad f(3)=(3)^2-2(3)-3=9-6-3=0$$
$$x=4, \quad f(4)=(4)^2-2(4)-3=16-8-3=5$$

Luego se ubican todos los pares de puntos en el plano cartesiano, dando como resultado la siguiente gráfica:



Ejemplo: Graficar $f\left(x\right)=-2x^2$

Calculemos primero el vértice, para este caso tenemos que $a=-2, \quad b=0, \quad c=0$

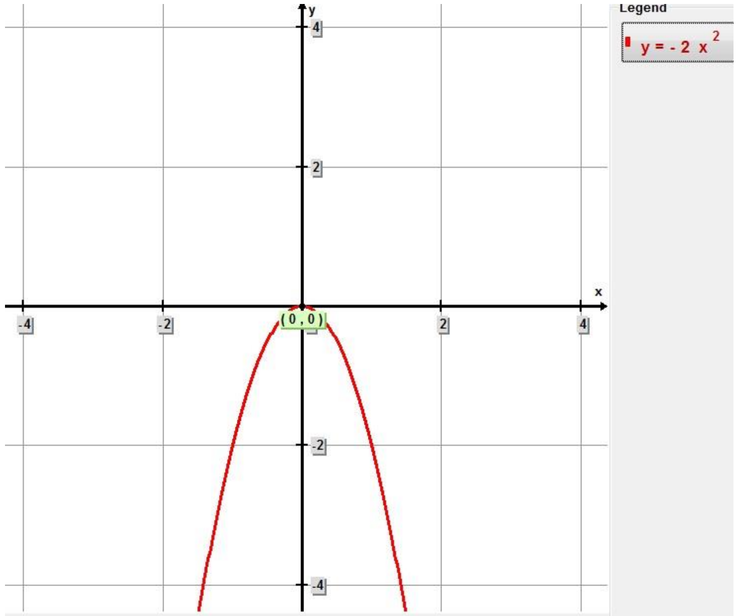
Luego, $$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-0}{2\left(-2\right)}=\frac{0}{-4}=0$$

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\left(-2\right)\left(0\right)-\left(0\right)^2}{4\left(-2\right)}=\frac{0-0}{-8}=\frac{0}{-8}=0$$

De donde el vértice es $\left(0,0\right)$ Luego asignamos algunos valores para la variable x, donde cada valor de x generará un valor para f(x).

$$x=-2, \quad f\left(-2\right)=-2\left(-2\right)^2=-2\left(4\right)=-8$$
$$x=-1, \quad f\left(-1\right)=-2\left(-1\right)^2=-2\left(1\right)=-2$$
$$x=0, \quad f\left(0\right)=-2\left(0\right)^2=-2\left(0\right)=0$$
$$x=1, \quad f\left(1\right)=-2\left(1\right)^2=-2\left(1\right)=-2$$
$$x=2, \quad f\left(2\right)=-2\left(2\right)^2=-2\left(4\right)=-8$$

Luego se ubican todos los pares de puntos en el plano cartesiano, dando como resultado la siguiente gráfica:



Evaluación formativa: grafica las funciones, además determina su dominio y codominio $f(x)=2x^2-x-5$ $\quad f(x)=-2x^2+2$

P.9 Gráfica de las funciones irracionales: para graficar funciones irracionales, lo primero que tenemos que hacer es determinar su dominio, para saber cuáles son los valores que podemos sustituir en la función.

Ejemplo: graficar la función $f(x)=\sqrt{2x+5}$ Solución: busquemos su dominio,

$$2x+5\geq 0 \Rightarrow 2x\geq -5 \Rightarrow x\geq -\frac{5}{2} \Rightarrow D_f=\left[-\frac{5}{2},+\infty\right)$$

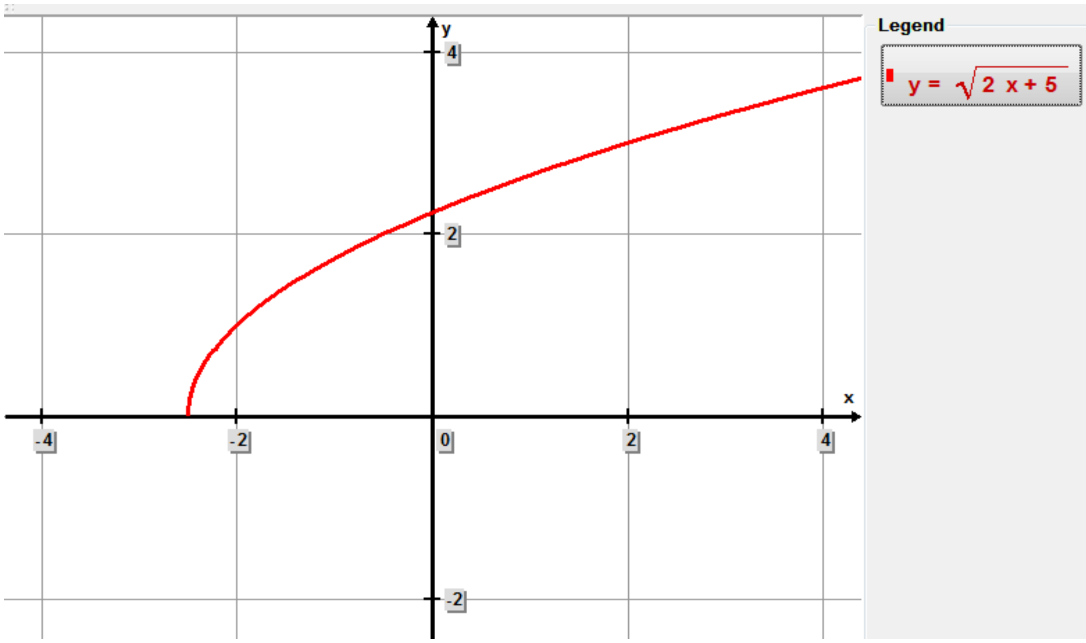
$$x=-\frac{-5}{2},\quad f\left(\frac{-5}{2}\right)=\sqrt{2\left(\frac{-5}{2}\right)+5}=\sqrt{-5+5}=\sqrt{0}=0$$

$$x=0,\quad f(0)=\sqrt{2(0)+5}=\sqrt{0+5}=\sqrt{5}=2.23$$

$$x=5,\quad f(5)=\sqrt{2(5)+5}=\sqrt{10+5}=\sqrt{15}=3.87$$

$$x=12,\quad f(12)=\sqrt{2(12)+5}=\sqrt{24+5}=\sqrt{29}=5.38$$

$$x=25,\quad f(25)=\sqrt{2(25)+5}=\sqrt{50+5}=\sqrt{55}=7.41$$



P.10 Gráfica de las funciones exponenciales $f(x)=b^x$. Dependiendo de la base, si es positiva o negativa la gráfica está formada por una o dos ramas respectivamente.

ACTIVIDAD FORMATIVA

Grafica las siguientes funciones, determina su dominio y codominio.

$f(x)=-2x+5$ $\quad$ $f(x)=2x^2-x-4$ $\quad$ $f(x)=\sqrt{3x-6}$

$f(x)=x^3-5x^2+3x-2$ $\quad$ $f(x)=(3)^x$

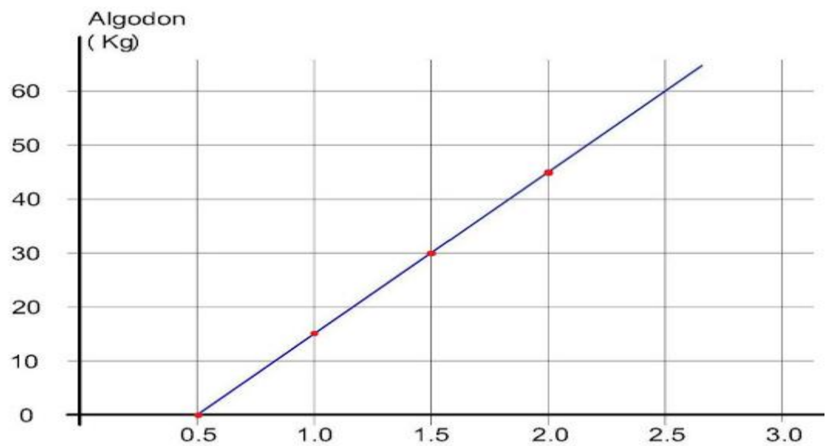
APLICACIONES DE LAS FUNCIONES

1. Un algodonero recoge 30 Kg cada hora, y demora media hora preparándose todos los días cuando inicia la jornada. La función lineal que representa esta situación es *y = 30x – 15* donde "***y***" representa los Kg de algodón recogido y "***x***" el tiempo transcurrido en horas. Realiza una tabla para la anterior función y grafícala. ¿Cuantos Kg de algodón se recogerán en una jornada de 8 horas? Observación: considere media hora igual a 0.5

Solución:

x (Horas)	f(x) (Kg)
0.5	0
1	15
1.5	30
2	45
8	225

$$x = 0.5 \Rightarrow y = 30(0.5) - 15 = 15 - 15 = 0$$
$$x = 1 \Rightarrow y = 30(1) - 15 = 30 - 15 = 15$$
$$x = 1.5 \Rightarrow y = 30(1.5) - 15 = 45 - 15 = 30$$
$$x = 2 \Rightarrow y = 30(2) - 15 = 60 - 15 = 45$$
$$x = 8 \Rightarrow y = 30(8) - 15 = 240 - 15 = 225$$



Respuesta: Al transcurrir 8 horas el algodonero habrá recogido 225kg

EVALUACIÓN FORMATIVA

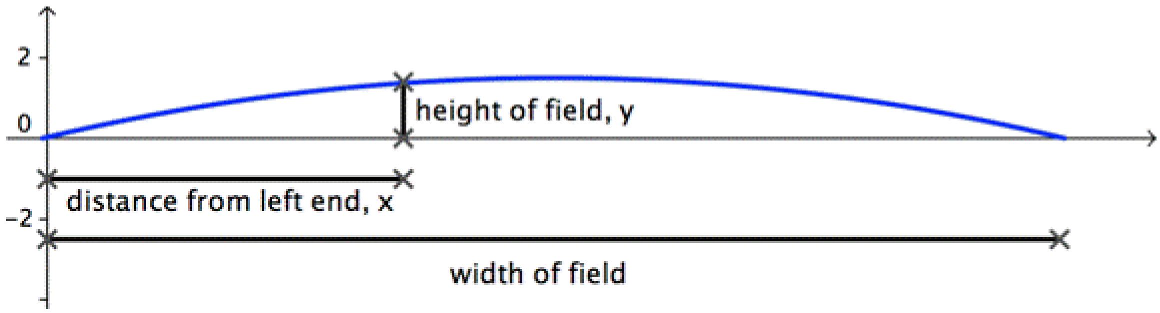
1. En un día por el alquiler de un auto cobran una cuota fija de B/.50 y adicionalmente B/.2 por kilómetro recorrido. Escribe la ecuación canónica que representa esta función ¿cuánto dinero hay que pagar para hacer un recorrido de 150 Km? y si page un valor de B/.100 ¿cuantos kilómetros recorrí?

Observación: Para resolver este tipo de problemas donde nos piden hallar el valor por unidad consumida y la cuota fija usaremos la ecuación canónica, donde la pendiente de la recta (m) es siempre el valor por unidad consumida y b la cuota fija.

2. Un tren acaba de salir de la ciudad A, situada a 750km de la ciudad B, y viaja a una velocidad de 200Km/h, expresar mediante una ecuación lineal la distancia a la que se encontrará de la ciudad B en (t) horas. Determine cuántas horas deben pasar para que llegue de una ciudad a otra.

3. Sara es una vendedora de computadoras con un salario mensual de B/.1000, más una comisión de B/.25 por cada computadora vendida en el mes. Represente la situación mediante una función lineal y determine. ¿Cuántas computadoras debe vender al mes para que su ingreso mensual sea de B/.1275?

4. A pesar de que el césped sintético del campo de un estadio es aparentemente plano, su superficie tiene la forma de una parábola. Esto es para que la lluvia resbale hacia los lados. Si tomamos la sección transversal del campo, la superficie puede ser modelada por $y = -0.000234(x-80)^2 + 1.5$, donde *x* es la distancia desde la izquierda del campo y *y* es la altura del campo. ¿Cuál es el ancho del campo?



A) 80 pies B) 1.5 pies C) 234 pies D) 160 pies

5. Una granjera tiene 1000 pies de cerca y un campo muy grande. Pone una cerca formando un área rectangular con dimensiones *x* pies y 500 – *x* pies. ¿Cuál es el área del rectángulo más grande que puede ella crear?

A) 62,500 pies^2 B) 250,000 pies^2 C) 1,000 pies^2 D) 500 pies^2

6. Se te da la siguiente información de precio y cantidad. Escribe una ecuación que represente la ganancia anual *P* para un precio *s*. El costo de producción por artículo es de $30.

Precio de Ventas *s*	Cantidad vendida *q*
100	7000
200	6000
500	3000
600	2000
800	0

A) $P = -10S + 8000$ B) $P = Sq - 30q$ C) $P = -10S^2 + 8300S - 240000$
D) $P = -30S^2 + 7000S + 800$

"Sólo una cosa convierte en imposible un sueño: el miedo a fracasar"
(Paulo Coelho)

REPASO GENERAL DE ÁLGEBRA PARA EL CÁLCULO

El estudio de esta unidad se deja al estudiante (todos estos temas fueron tratados en el álgebra del colegio)

CASO # 1 FACTOR COMÚN MONOMIO

Factorizar los siguientes polinomios aplicando el factor común monomio.

$$8ax^3 + 4bx^4 + 6cx^2$$

Se observa claramente que 8, 4 y 6 tienen en común el # 2, pues es el máximo común divisor que tienen los tres, y además cada término del polinomio tienen en común la letra x pero con diferentes potencias, cuando esto sucede se toma la que tiene el exponente menor en este caso x^2, éstos son los únicos elementos comunes que tienen los términos del polinomio ahora se procede a dividir cada término del polinomio entre lo común, de la siguiente manera:

Para $8ax^3 + 4bx^4 + 6cx^2$ se tiene que:

$$\frac{8ax^3}{2x^2} = 4ax^{3-2} = 4ax$$

Se divide número o simplifica número entre número y las letras que son iguales se dividen entre ellas, si hay alguna letra que solamente aparece en un lado en este caso la **a** que sólo está arriba, se le adiciona a la respuesta, pues no se puede simplificar con nada.

Luego, $\frac{4bx^4}{2x^2} = 2bx^{4-2} = 2bx^2$ Y por último $\frac{6cx^2}{2x^2} = 3cx^{2-2} = 3bx^0 = 3x(1) = 3x$

Luego se concluye que:

$$8ax^3 + 4bx^4 + 6cx^2 = \underbrace{2x^2}_{\text{Término común}}\underbrace{\left(4ax + 2bx^2 + 3c\right)}_{\text{Polinomio}}$$

Resultado de la división

Factorizar $10x^3y^2 - 5x^2y^3 + 20xy^4$

Solución: el máximo común divisor de 10, 5 y 20 es 5 y de las letras para la x su menor exponente es 1 y para la y su menor exponente es 2. Para este caso el término común es $5xy^2$ Ahora procedemos a dividir:

$$\frac{10x^3y^2}{5xy^2} = 2x^{3-1}y^{2-2} = 2x^2y^0 = 2x^2(1) = 2x^2$$

$$\frac{-5x^2y^3}{5xy^2} = -1x^{2-1}y^{3-2} = -xy$$

$$\frac{20xy^4}{5xy^2} = 4x^{1-1}y^{4-2} = 4x^0y^2 = 4(1)y^2 = 4y^2$$

Luego, $$10x^3y^2 - 5x^2y^3 + 20xy^4 = 5xy^2\left(2x^2 - xy + 4y^2\right)$$

Factorizar: $18mxy^2 - 54m^2x^2y^2 + 36my^2$

Solución: el máximo común divisor de 18, 54 y 36 es 18 y de las letras que son

Comunes para la m el menor exponente es 1 y para la y su menor exponente es 2, la x no es común en los tres términos.

Luego, el término común es $18my^2$

Posteriormente dividimos:

$$\frac{18mxy^2}{18my^2} = 1m^{1-1}xy^{2-2} = m^0xy^0 = (1)x(1) = x$$

$$\frac{-54m^2x^2y^2}{18my^2} = -3m^{2-1}x^2y^{2-2} = -3mx^2y^0 = -3mx^2(1) = -3mx^2$$

$$\frac{+36my^2}{18my^2} = 2m^{1-1}y^{2-2} = 2m^0y^0 = 2(1)(1) = 2$$

Luego,

$$18mxy^2 - 54m^2x^2y^2 + 36my^2 = 18my^2(x - 3mx^2 + 2)$$

CASO # 2 FACTOR COMÚN POLINOMIO

Se sigue el mismo procedimiento que el caso anterior, solamente que para este caso resultará como elemento común un polinomio y no un monomio.

Ejemplos:

Factorizar los siguientes polinomios aplicando el factor común polinomio.

a) $x(a+b) + m(a+b) - w^2(a+b) + 5(a+b)$

Solución: todos los términos tienen en común el polinomio $(a+b)$

Luego dividimos.

$$\frac{x(a+b)}{(a+b)} = x(a+b)^{1-1} = x(a+b)^0 = x(1) = x$$

$$\frac{m(a+b)}{(a+b)} = m(a+b)^{1-1} = m(a+b)^0 = m(1) = m$$

$$\frac{-w^2(a+b)}{(a+b)} = -w^2(a+b)^{1-1} = -w^2(a+b)^0 = -w^2(1) = -w^2$$

$$\frac{5(a+b)}{(a+b)} = 5(a+b)^{1-1} = 5(a+b)^0 = 5(1) = 5$$

Luego, $x(a+b) + m(a+b) - w^2(a+b) + 5(a+b) = (a+b)(x + m - w^2 + 5)$

Factorizar: $\left(x^2+2\right)\left(m-n\right)+2\left(m-n\right)+x\left(m-n\right)^2$

Solución: el elemento que tiene en común todos los términos es $\left(m-n\right)$ y se toma el de exponente menor en este caso el exponente menor es 1, Luego dividimos:

$$\frac{\left(x^2+2\right)\left(m-n\right)}{\left(m-n\right)}=\left(x^2+2\right)\left(m-n\right)^{1-1}=\left(x^2+2\right)\left(m-n\right)^0=\left(x^2+2\right)\left(1\right)=\left(x^2+2\right)$$

$$\frac{2\left(m-n\right)}{\left(m-n\right)}=2\left(m-n\right)^{1-1}=2\left(m-n\right)^0=2\left(1\right)=2$$

$$\frac{x\left(m-n\right)^2}{\left(m-n\right)}=x\left(m-n\right)^{2-1}=x\left(m-n\right)$$

Luego,

$$\begin{aligned}\left(x^2+2\right)\left(m-n\right)+2\left(m-n\right)+x\left(m-n\right)^2&=\left(m-n\right)\left(x^2+2+2+x\left(m-n\right)\right)\\&=\left(m-n\right)\left(x^2+2+2+xm-xn\right)\\&=\left(m-n\right)\left(x^2+4+xm-xn\right)\end{aligned}$$

Factorizar: $-2a^4b^3\left(x-y\right)^2-4a^3b^2\left(x-y\right)^2-6a^2b\left(x-y\right)^2$

Solución:

2, 4 y 6 tienen en común el 2 que es su máximo común divisor también tienen en el signo menos, la a y su menor exponente es 2 y de la b su menor exponente es 1 y además tienen en común $\left(x-y\right)^2$

Luego, el elemento común es $-2a^2b\left(x-y\right)^2$

Por último dividimos,

$$\frac{-2a^4b^3(x-y)^2}{-2a^2b(x-y)^2} = 1a^{4-2}b^{3-1}(x-y)^{2-2} = a^2b^2(x-y)^0 = a^2b^2(1) = a^2b^2$$

$$\frac{-4a^3b^2(x-y)^2}{-2a^2b(x-y)^2} = 2a^{3-2}b^{2-1}(x-y)^{2-2} = 2ab(x-y)^0 = 2ab(1) = 2ab$$

$$\frac{-6a^2b(x-y)^2}{-2a^2b(x-y)^2} = 3a^{2-2}b^{1-1}(x-y)^{2-2} = 3a^0b^0(x-y)^0 = 3(1)(1)(1) = 3$$

Luego,

$$-2a^4b^3(x-y)^2 - 4a^3b^2(x-y)^2 - 6a^2b(x-y)^2 = -2a^2b(x-y)^2\left[a^2b^2 + 2ab + 3\right]$$

CASO # 3 FACTORIZACIÓN DE LA FORMA $(x+m)(x+n)$

Este caso se aplica a polinomios de la forma $x^2 + bx + c$

Para Factorizar estos polinomios se deben buscar dos números que son únicos, cuya multiplicación sea igual a **c**, es decir el término libre y cuya suma o resta sea igual a **b**, es decir al coeficiente numérico de x. Para este caso de factorización se deben recordar las leyes de los signos para la suma y la multiplicación.

Ejemplos: Factorizar: $x^2 + 5x + 6$

Luego, $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$

Se observa claramente que $2 \bullet 3 = 6$ y que $2 + 3 = 5$

Factorizar: $x^2 + 4x - 21$

Luego, $x^2 + 4x - 21 = (x+7)(x-3)$

Se observa claramente que $7 \bullet -3 = -21$ y que $7 - 3 = 4$

Factorizar: $x^2 - 2x - 48$

Luego, $x^2 - 2x - 48 = (x-8)(x+6)$

Se observa claramente que $-8 \bullet 6 = -48$ y que $-8+6=-2$

Factorizar: $x^2 - 8x + 15$

Luego, $x^2 - 8x + 15 = (x-5)(x-3)$

Se observa claramente que $-5 \bullet -3 = 15$ y que $-5+-3=-8$

CASO # 4 FACTORIZACIÓN MEDIANTE LA FÓRMULA GENERAL

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, este caso únicamente se puede aplicar a polinomios de la forma $ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$

Factorizar: $6x^2 - x - 2$ De donde:

$a=6, \quad b=-1, \quad c=-2$

Aplicando la fórmula general obtenemos:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \bullet 6 \bullet -2}}{2 \bullet 6}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{12}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{12}$$

$$x = \frac{1 \pm 7}{12}$$

Luego del valor obtenido de la raíz, se toma
uno positivo y uno negativo y se obtienen los dos valores de x.

$$x = \frac{1+7}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \quad , \quad x = \frac{1-7}{12} = \frac{-6}{12} = \frac{-1}{2}$$

Luego, $6x^2 - x - 2 = (3x-2)(2x+1)$

UNIDAD DE APRENDIZAJE #1
LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

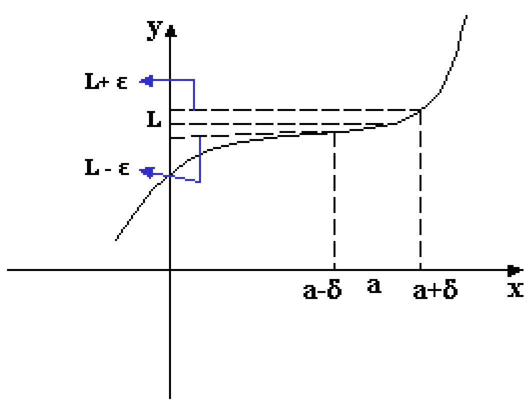
Objetivo: Calcular el límite de una función por diversos métodos según sea el caso.

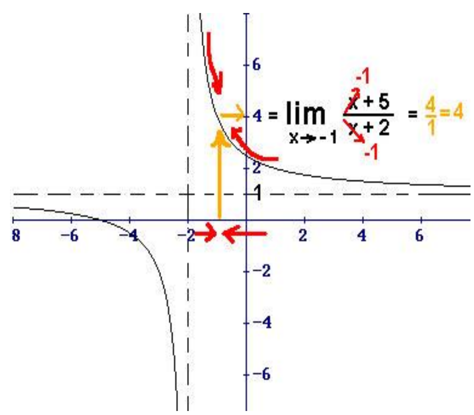
LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

1.1 Concepto: El concepto de límite en Matemáticas tiene el sentido de "lugar" hacia el que se dirige una función en un determinado punto o en el infinito. En notación simbólica tenemos que dada una función $f(x)$ y un punto $x=a$ se dice que el límite de $f(x)$ cuando x se acerca al valor "a" es L y se denota como:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Dado $\in > 0$, existe $\delta > 0$ tal que siempre que $|x-a|<\delta$, entonces $|f(x)-L|<\delta$ Lo que viene a expresar esta formulación matemática es que si "x" está "suficientemente cerca" de a, entonces su imagen $f(x)$ también está muy próxima a L.





En la práctica en muchas ocasiones es necesario calcular los llamados límites laterales, que se definen de la siguiente forma:

1.2 Definición: Se define el *límite lateral por la derecha* de *"a"* de la función $f(x)$, y se expresa como: $\lim_{x\to a^+} f(x)$

De igual forma se define el *límite lateral por la izquierda* de *"a"* de la función $f(x)$, y se expresa como: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

Propiedad: Para que una función $f(x)$ tenga límite en $x=a$ es necesario y suficiente que existan ambos límites laterales y coincidan, es decir: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

1.3 Concepto de límite intuitivamente: Fundamentalmente puede decirse que un límite es algo que no puede sobrepasarse. En otras palabras sería el estado final de una cosa.

Analicemos un ejemplo sencillo: $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1},\quad D_f = R-\{1\}$

x	**-4**	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$f(x)$	13	7	3	1	1	?	7	13	21

Para este ejemplo el único número que no debe usarse en la tabla es el uno, pero sí pueden usarse infinitos números entre el 1 y el 0, y entre el 1 y el 2.

x	**0.5**	**0.75**	**0.9**	**0.99**	**0.999**	**1**	**1.0001**	**1.001**	**1.01**	**1.1**	**1.25**	**1.5**
$f(x)$	1.750	2.313	2.710	2.970	etc	?	etc	3.003	3.03	3.31	3.813	4.75

Se observa claramente que $f(x)$ se aproxima al número tres por la izquierda y de igual forma por la derecha de donde se puede concluir que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=3$

Actividad Formativa: Para cada uno de los problemas completa la tabla correspondiente y de esta manera estimar el límite propuesto.

x	**3.9**	**3.99**	**3.999**	**4**	**4.001**	**4.01**	**4.1**
$f(x)$							
x	**2.9**	**2.99**	**2.999**	**3**	**3.001**	**3.01**	**3.1**
$f(x)$							

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2+x-20}{x-4}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$$

1.4 Propiedades de los límites:

- Si $f(x)=c, \quad c \in R$ entonces, $\lim_{x\to a} c = c$
- Múltiplo escalar $\lim_{x\to a} bf(x) = b\lim_{x\to a} f(x)$ donde b es un número real.
- Suma o Resta de funciones $\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$
- Producto de funciones $\lim_{x\to a}\left[f(x)\bullet g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\bullet\lim_{x\to a} g(x)$
- Cociente de funciones $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$
- El $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$

1.5 Cálculo del límite de una función utilizando los teoremas.

Ejemplos: Calcular

$\lim_{x\to 2} 2x^2-3x+5$ Para calcular el límite simplemente sustituimos la x por su respectivo valor.

$$\lim_{x\to 2} 2x^2-3x+5$$
$$=2(2)^2-3(2)+5$$
$$=2(4)-6+5$$
$$8-6+5$$
$$7$$

Luego,

$$\lim_{x\to 2} 2x^2-3x+5=7$$

Calcular $\lim_{x\to -1} x^2-2x-8$

Para calcular el límite simplemente sustituimos la x por su respectivo valor.

$$\lim_{x\to -1} x^2-2x-8$$
$$=(-1)^2-2(-1)-8$$
$$1+2-8$$
$$3-8$$
$$-5$$

Luego, $\lim_{x\to -1} x^2-2x-8=-5$

Cálculo de límites indeterminados:

$\dfrac{0}{n}=0 \quad ,n\neq 0$, $\qquad \dfrac{n}{0}=\infty \quad ,n\neq 0$, $\qquad \dfrac{0}{0}$ Cuando esto sucede obligatoriamente hay que factorizar si es un polinomio, y si interviene raíces, se multiplica por el conjugado.

Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$

Al evaluar este límite el resultado es $\dfrac{0}{0}$ y como son polinomios, tenemos que Factorizar.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}\\
&=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}\\
&=\lim_{x\to 3}(x+3)\\
&=3+3\\
&=6
\end{aligned}$$

Luego, $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$

Calcular $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^2+3x+2}$

Al evaluar este límite el resultado es $\dfrac{0}{0}$ y como son polinomios, tenemos que Factorizar.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^2+3x+2}\\
&=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x+1)}\\
&=\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)}{(x+1)}\\
&=\frac{-2-2}{-2+1}\\
&=\frac{-4}{-1}\\
&=4
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^2+3x+2}=4$$

Calcular $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^2+8x+7}{x^2-x-2}$

Al evaluar este límite el resultado es $\dfrac{0}{0}$ y como son polinomios, tenemos que Factorizar.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+8x+7}{x^2-x-2}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+7)}{(x+1)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+7)}{(x-2)}$$
$$=\frac{-1+7}{-1-2}$$
$$=\frac{6}{-3}$$
$$=-2$$

ACTIVIDAD FORMATIVA

Calcule los siguientes límites.

$$\lim_{x\to 1}4x^2+2x-1 \qquad \lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4} \qquad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to -2}x^2-2x+7 \qquad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} \qquad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9x+18}{x^2-9}$$

Calcular $\lim_{x\to 1}\frac{7x^2-9x+2}{5x^2-2x-3}$ Debemos factorizar ambos polinomios.

$$\lim_{x\to 1}\frac{7x^2-9x+2}{5x^2-2x-3}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(7x-2)}{(x-1)(5x+3)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{7x-2}{5x+3}$$
$$=\frac{7(1)-2}{5(1)+3}=\frac{7-2}{5+3}=\frac{5}{8}$$

$$\frac{7(7x^2-9x+2)}{7}$$
$$=\frac{(7x)^2-9(7x)+14}{7}$$
$$=\frac{(7x-7)(7x-2)}{7}$$
$$=\frac{7(x-1)(7x-2)}{7}$$
$$=(x-1)(7x-2)$$

$$\frac{5(5x^2-2x-3)}{5}$$
$$=\frac{(5x)^2-2(5x)-15}{5}$$
$$=\frac{(5x-5)(5x+3)}{5}$$
$$=\frac{5(x-1)(5x+3)}{5}$$
$$=(x-1)(5x+3)$$

Calcular $\lim_{x\to -2}\frac{6x^2+14x+4}{8x^2+12x-8}$ Debemos factorizar ambos polinomios.

$$\lim_{x\to -2}\frac{6x^2+14x+4}{8x^2+12x-8}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(6x+2)}{(x+2)(8x-4)}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{6x+2}{8x-4}$$
$$=\frac{6(-2)+2}{8(-2)-4}=\frac{-12+2}{-16-4}$$
$$=\frac{-10}{-20}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{6(6x^2+14x+4)}{6}$$
$$=\frac{(6x)^2+14(6x)+24}{6}$$
$$=\frac{(6x+12)(6x+2)}{6}$$
$$=\frac{6(x+2)(6x+2)}{6}$$
$$=(x+2)(6x+2)$$

$$\frac{8(8x^2+12x-8)}{8}$$
$$=\frac{(8x)^2+12(8x)-64}{8}$$
$$=\frac{(8x+16)(8x-4)}{8}$$
$$=\frac{8(x+2)(8x-4)}{8}$$
$$=(x+2)(8x-4)$$

Calcular $\lim_{x\to 5}\frac{2x^2-11x+5}{4x^2-18x-10}$ Debemos factorizar ambos polinomios.

$$\lim_{x\to 5}\frac{2x^2-11x+5}{4x^2-18x-10}$$
$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(2x-1)}{(x-5)(4x+2)}$$
$$=\lim_{x\to 5}\frac{2x-1}{4x+2}$$
$$=\frac{2(5)-1}{4(5)+2}=\frac{10-1}{20+2}$$
$$=\frac{9}{22}$$

$$\frac{2(2x^2-11x+5)}{2}$$
$$=\frac{(2x)^2-11(2x)+10}{2}$$
$$=\frac{(2x-10)(2x-1)}{2}$$
$$=\frac{2(x-5)(2x-1)}{2}$$
$$=(x-5)(2x-1)$$

$$\frac{4(4x^2-18x-10)}{4}$$
$$=\frac{(4x)^2-18(4x)-40}{4}$$
$$=\frac{(4x-20)(4x+2)}{4}$$
$$=\frac{4(x-5)(4x+2)}{4}$$
$$=(x-5)(4x+2)$$

EVALUACIÓN FORMATIVA

Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-13x+12}{4x^2-15x+9},\quad \lim_{x\to 7}\frac{5x^2-30x-35}{x^2-2x-35},\quad \lim_{x\to -2}\frac{6x^2-3x-30}{12x^2+21x-6},\quad \lim_{x\to -2}\frac{4x^2+6x-4}{6x^2+14x+4}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{3x^2+8x+4}{2x^2+7x+6},\quad \lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{6x^2+x-2}{10x^2-3x-1},\quad \lim_{x\to \frac{2}{3}}\frac{6x^2-x-2}{9x^2-15x+6}$$

$$\lim_{x\to -7}\frac{2x^2+15x+7}{x^2-49},\quad \lim_{x\to 1}\frac{5x^2-2x-3}{x^2+11x-12},\quad \lim_{x\to -\frac{4}{3}}\frac{3x^2+10x+8}{3x^2-5x-12}$$

EVALUACIÓN SUMATIVA (3 INTEGRANTES)

Calcula los siguientes límites: puntos, resolución de los problemas 40 puntos (10 puntos cada uno)

Criterios de evaluación: orden y aseo 2

$$\lim_{x\to 9}\frac{x^2-2x-63}{x^2-5x-36},\quad \lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{5x^2-3x-2},\quad \lim_{x\to -1}\frac{12x^2+4x-8}{8x^2-12x-20},\quad \lim_{x\to 7}\frac{2x^2-4x-70}{5x^2-30x-35}$$

Calcular $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{x-2}$ *Solución:* como es un límite indeterminado donde intervienen raíces, tenemos que multiplicar por el conjugado.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{x-2}\right)\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}{(x-2)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+1-3}{(x-2)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2+1}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{2-x}-\sqrt{2}}$ *Solución:* como es un límite indeterminado donde intervienen raíces, tenemos que multiplicar por el conjugado.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{2-x}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sqrt{2-x}-\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{2-x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}x\left(\frac{\sqrt{2-x}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2-x}\right)^{2}-\left(\sqrt{2}\right)^{2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}x\left(\frac{\sqrt{2-x}+\sqrt{2}}{2-x+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}x\left(\frac{\sqrt{2-x}+\sqrt{2}}{-x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}-\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2}\right)$$

$$=-\left(\sqrt{2-0}+\sqrt{2}\right)=-\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)=-2\sqrt{2}$$

Calcular $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^{3}+1}-3}{1-\sqrt{2x-3}}$ *Solución*: como es un límite indeterminado donde intervienen raíces, tenemos que multiplicar por el conjugado.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^{3}+1}-3}{1-\sqrt{2x-3}}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x^{3}+1}-3}{1-\sqrt{2x-3}}\right)\left(\frac{\sqrt{x^{3}+1}+3}{\sqrt{x^{3}+1}+3}\right)\left(\frac{1+\sqrt{2x-3}}{1+\sqrt{2x-3}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{\left(\sqrt{x^{3}+1}\right)^{2}-(3)^{2}}{(1)^{2}-\left(\sqrt{2x-3}\right)^{2}}\right]\left(\frac{1+\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x^{3}+1}+3}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^{3}+1-9}{1-2x+3}\right]\left(\frac{1+\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x^{3}+1}+3}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{(x-2)\left(x^{2}+2x+4\right)}{-2x+4}\right]\left(\frac{1+\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x^{3}+1}+3}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{(x-2)\left(x^{2}+2x+4\right)}{-2(x-2)}\right]\left(\frac{1+\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x^{3}+1}+3}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^{2}+2x+4}{-2}\right]\left(\frac{1+\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x^{3}+1}+3}\right)$$

$$=\left[\frac{(2)^{2}+2(2)+4}{-2}\right]\left(\frac{1+\sqrt{2(2)-3}}{\sqrt{(2)^{3}+1}+3}\right)=\left[\frac{4+4+4}{-2}\right]\left(\frac{1+\sqrt{4-3}}{\sqrt{8+1}+3}\right)$$

$$=\left[\frac{12}{-2}\right]\left(\frac{1+\sqrt{1}}{\sqrt{9}+3}\right)=-6\left(\frac{1+1}{3+3}\right)=-6\left(\frac{2}{6}\right)=-2$$

EVALUACIÓN FORMATIVA

Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x+5}-3},\quad \lim_{x\to 9}\frac{x^2-81}{2\sqrt{x}-6},\quad \lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{x},\quad \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$

EVALUACIÓN SUMATIVA (3 INTEGRANTES)

Calcula los siguientes límites: puntos, resolución de los problemas 40 puntos (10 puntos cada uno). Criterios de evaluación: orden y aseo 2

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^4+3}-2}{3-\sqrt{5x+4}},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{16+x}-4}{x},\quad \lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}},\quad \lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$$

1.7 Límites cuando $x\to\infty$. Dadas dos funciones $f(x)$, $g(x)$ entonces $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x)\neq 0$ depende de los siguientes casos:

- si el grado de $f(x)$ es menor que el grado de $g(x)\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$
- si el grado de $f(x)$ es mayor que el grado de $g(x)\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ el límite no existe y se coloca ∞
- si el grado de $f(x)$ es igual al grado de $g(x)\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ depende de los coeficientes de que acompañan a la mayor potencia.

Observación: se debe tomar en cuenta que $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

Calcular $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+7x-9}{-8x^5+3x^3+x^2-5x+1}$ *Solución:* debemos dividir cada término tanto del numerador y del denominador entre la mayor potencia de toda la función.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+7x-9}{-8x^5+3x^3+x^2-5x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^3}{x^5}-\frac{2x^2}{x^5}+\frac{7x}{x^5}-\frac{9}{x^5}}{-\frac{8x^5}{x^5}+\frac{3x^3}{x^5}+\frac{x^2}{x^5}-\frac{5x}{x^5}+\frac{1}{x^5}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{7}{x^4}-\frac{9}{x^5}}{-8+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{5}{x^4}+\frac{1}{x^5}}$$

$$=\frac{\frac{4}{(\infty)^2}-\frac{2}{(\infty)^3}+\frac{7}{(\infty)^4}-\frac{9}{(\infty)^5}}{-8+\frac{3}{(\infty)^2}+\frac{1}{(\infty)^3}-\frac{5}{(\infty)^4}+\frac{1}{(\infty)^5}}$$

$$=\frac{0-0+0-0}{-8+0+0-0+0}=\frac{0}{-8}=0$$

Calcular $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+7x-9}{-8x^5+3x^3+x^2-5x+1}$ *Solución:* debemos dividir cada término tanto del numerador y del denominador entre la mayor potencia de toda la función.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+5x^3+7x^2-3x}{6x^3-4x^2+8x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^4}{x^4}+\frac{5x^3}{x^4}+\frac{7x^2}{x^4}-\frac{3x}{x^4}}{\frac{6x^3}{x^4}-\frac{4x^2}{x^4}+\frac{8x}{x^4}-\frac{2}{x^4}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{\frac{6}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{2}{x^4}}$$

$$=\frac{2+\frac{5}{\infty}+\frac{7}{(\infty)^2}-\frac{3}{(\infty)^3}}{\frac{6}{\infty}-\frac{4}{(\infty)^2}+\frac{8}{(\infty)^3}-\frac{2}{(\infty)^4}}$$

$$=\frac{2+0+0-0}{0-0+0+0}=\frac{2}{0}\text{ no existe}=\infty$$

Calcular $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+8x^2-7x-4}{-10x^3+6x^2+2x+3}$ *Solución:* debemos dividir cada término tanto del numerador y del denominador entre la mayor potencia de toda la función.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+8x^2-7x-4}{-10x^3+6x^2+2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^3}{x^3}+\frac{8x^2}{x^3}-\frac{7x}{x^3}-\frac{4}{x^3}}{\frac{-10x^3}{x^3}+\frac{6x^2}{x^3}+\frac{2x}{x^3}+\frac{3}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{8}{x}-\frac{7}{x^2}-\frac{4}{x^3}}{-10+\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}}$$

$$=\frac{5+\frac{8}{\infty}-\frac{7}{(\infty)^2}-\frac{4}{(\infty)^3}}{-10+\frac{6}{\infty}+\frac{2}{(\infty)^2}-\frac{2}{(\infty)^3}}$$

$$=\frac{5+0-0-0}{-10+0+0-0}=\frac{5}{-10}=-\frac{1}{2}$$

Calcular $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2+16}}{2x-10}$ *Solución:* debemos dividir cada término tanto del numerador y del denominador entre la mayor potencia de toda la función.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2+16}}{2x-10}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{9x^2+16}}{x}}{\frac{2x-10}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{9x^2}{x^2}+\frac{16}{x^2}}}{\frac{2x}{x}-\frac{10}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{16}{x^2}}}{2-\frac{10}{x}}$$

$$=\frac{\sqrt{9+\frac{16}{(\infty)^2}}}{2-\frac{10}{(\infty)}}=\frac{\sqrt{9+0}}{2-0}=\frac{\sqrt{9+0}}{2-0}=\frac{\sqrt{9}}{2}=\frac{3}{2}$$

EVALUACIÓN FORMATIVA

Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12x^4-9x^2-3x+1}{5x^3-5x^2-10x+7},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{-14x^3+4x^2+6x-5}{7x^3-2x^2+8x+3},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{-3x^4+3x^3+11x^2-30x+22}{2x^5-10x^4-6x^3+x-2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10+x\sqrt{x}}{x^2}$$

Problema de aplicación: Se sabe que el precio de un artículo a través del tiempo en "x" meses está dado por la función $f(x)=\dfrac{ax+8}{x+b}$ si se sabe que el precio de este artículo en el próximo mes será de B/.6.50 y el siguiente será de b/.6.00, se desea saber: a) El precio del artículo para este mes, b) ¿En qué mes el precio será de B/.5.50? c) ¿Qué ocurre con el precio a largo plazo?

Solución: sea x: el tiempo en meses y f: el precio en B/. Consideremos el mes actual como x=0, luego el próximo mes será x=1 y el siguiente mes al próximo x=2 y a lo largo del tiempo x se aproxima a infinito.

Primero debemos determinar el valor de "a" y el de "b" dentro de la función.

Por dato del problema el precio de este artículo el próximo mes será de B/.6.50, luego $\lim_{x\to1}\dfrac{ax+8}{x+b}=\dfrac{1a+8}{1+b}=\dfrac{a+8}{1+b}$ igualando al precio en ese mes obtenemos, $\dfrac{a+8}{1+b}=6.50\Rightarrow a+8=6.50(1+b)$ de donde se obtiene

$$a+8=6.50+6.50b\Rightarrow a-6.50b=6.50-8\Rightarrow a-6.50b=-1.5\qquad(*)$$

Por dato del problema el precio de este artículo en el siguiente mes será de B/.6.00, luego $\lim_{x\to2}\dfrac{ax+8}{x+b}=\dfrac{2a+8}{2+b}=\dfrac{2a+8}{2+b}$ igualando al precio en ese mes obtenemos,

$\dfrac{2a+8}{2+b}=6.00\Rightarrow 2a+8=6.00(2+b)$ de donde se obtiene

$$a+8=12.00+6.00b\Rightarrow 2a-6.00b=12.00-8\Rightarrow 2a-6.00b=4\qquad(**)$$

Luego formamos un sistema de ecuaciones para encontrar dichas incógnitas,

$$\begin{cases} a-6.50b=-1.5 \\ 2a-6.00b=4 \end{cases} \Rightarrow -2\begin{cases} a-6.50b=-1.5 \\ 2a-6.00b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\cancel{a}+13b=3 \\ 2\cancel{a}-6.00b=4 \end{cases}$$

De donde se deduce

$$7b=7 \Rightarrow b=\frac{7}{7} \Rightarrow b=1, \quad a-6.50(1)=-1.5 \Rightarrow a=-1.5+6.50 \Rightarrow a=5$$

Luego la función precio está dada por $f(x)=\dfrac{5x+8}{x+1}$

a) El precio del artículo para este mes está dado por:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x+8}{x+1}=\frac{5(0)+8}{0+1}=\frac{8}{1}=B/.8.00$$

b) ¿En qué mes el precio será de B/.5.50?

$$\frac{5x+8}{x+1}=5.50 \Rightarrow 5x+8=5.50(x+1) \Rightarrow 5x+8=5.50x+5.50 \Rightarrow 8-5.50=5.50x-5x$$

Luego, $0.50x=2.50 \Rightarrow x=\dfrac{2.50}{0.50} \Rightarrow x=5$ por lo tanto dentro de 5 meses el precio será de B/.5.50

c) ¿Qué ocurre con el precio a largo plazo?

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x+8}{x+1}=\frac{\frac{5x}{x}+\frac{8}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}=\frac{5+\frac{8}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}=\frac{5+0}{1+0}=\frac{5}{1}=B/.5.00$$

EVALUACIÓN FORMATIVA

1) En un estudio realizado se dedujo que las ventas diarias "S" en dólares en "x" días después de terminar una campaña publicitaria están dada por la función $S(x)=400+\dfrac{2400}{x+1}$, sabiendo que conforme pasan los días las ventas tienden a disminuir debido a que la publicidad ha terminado. Determine el ingreso en el instante que finaliza la campaña, cuando han transcurrido siete días y al cabo de dos semanas.

2) El costo en dólares de eliminar un x% de la contaminación del agua de cierto riachuelo está dada por $C(x)=\dfrac{75000x}{100-x}$ determine: a) el costo de eliminar la mitad

de la contaminación, b) ¿Qué porcentaje de la contaminación puede eliminarse con B/. 20 000?

3) Cierta función de costos se define por $C(x)=\dfrac{4x^2-100}{x-5}$ donde "x" es el número de artículos producidos (en cientos) y C es el costo de la producción (en miles de dólares), Encontrar $\lim_{x\to 5} C(x)$, $\lim_{x\to 3} C(x)$, $\lim_{x\to 0} C(x)$

"UNIDAD DE APRENDIZAJE #2 "LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN"

Objetivos: Calcular la derivada de una función.

Aplicar la derivada para determinar la pendiente de una recta y para resolver problemas de optimización (máximos y mínimos)

2.1 Concepto de derivada: sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene la variable "a", entonces la derivada de "f" en "a", denotada por $f'(a)$ está dada por: $f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ Si este límite existe.

2.2 Teoremas sobre las derivadas de funciones

Función $f(x)$	**Derivada** $f'(x)$	**Ejemplos**
$f(x)=C$ donde C es una constante	$f'(x)=0$	$f(x)=7$ $f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	
$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$f(x)=x^4$ $f'(x)=4x^{4-1}=4x^3$
$y=cf(x)$ donde c es una constante	$y'=cf'(x)$	$f(x)=5x^3$ $f'(x)=5(3x^{3-1})=5(3x^2)=15x^2$
$y=f(x)\bullet g(x)$	$f'(x)\bullet g(x)+f(x)\bullet g'(x)$	
$y=\dfrac{f(x)}{g(x)},\quad g(x)\neq 0$	$y'=\dfrac{f'(x)\bullet g(x)-f(x)\bullet g'(x)}{[g(x)]^2}$	

Ejemplos:

Derivar $y=(x+5)(x^2-1)$

$$y=(x+5)(x^2-1)$$
$$y'=(x+5)'(x^2-1)+(x+5)(x^2-1)'$$
$$y'=1(x^2-1)+(x+5)2x$$
$$y'=x^2-1+2x^2+10x+$$
$$y'=3x^2-1+10x$$

Derivar

$$y=4x^3-2x+1$$

$$y=4x^3-2x+1$$
$$y'=4(3x^{3-1})-2+0$$
$$y'=4(3x^2)-2$$
$$y'=12x^2-2$$

Derivar $y=\dfrac{5x-2}{x^2+3x}$

$$y=\frac{5x-2}{x^2+3x}$$
$$y'=\frac{(5x-2)'(x^2+3x)-(5x-2)(x^2+3x)'}{(x^2+3x)^2}$$
$$y'=\frac{5(x^2+3x)-(5x-2)(2x+3)}{(x^2+3x)^2}$$
$$y'=\frac{5x^2+15x-(10x^2+15x-4x-6)}{(x^2+3x)^2}$$
$$y'=\frac{5x^2+15x-(10x^2+11x-6)}{(x^2+3x)^2}$$
$$y'=\frac{5x^2+15x-10x^2-11x+6}{(x^2+3x)^2}$$
$$y'=\frac{-5x^2+4x+6}{(x^2+3x)^2}$$

Derivar $y=\dfrac{3x^2-4x}{x^2+5x}$

$$y=y=\frac{3x^2-4x}{x^2+5x}$$
$$y'=\frac{(3x^2-4x)'(x^2+5x)-(3x^2-4x)(x^2+5x)'}{(x^2+5x)^2}$$
$$y'=\frac{(6x-4)(x^2+5x)-(3x^2-4x)(2x+5)}{(x^2+5x)^2}$$
$$y'=\frac{6x^3+30x^2-4x^2-20x-(6x^3+15x^2-8x^2-20x)}{(x^2+5x)^2}$$
$$y'=\frac{6x^3+30x^2-4x^2-20x-6x^3-15x^2+8x^2+20x}{(x^2+5x)^2}$$
$$y'=\frac{19x^2}{(x^2+3x)^2}$$

2.3 Derivada de las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales.

$f(x)$	$senx$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$\sec x$	$\csc x$
$f'(x)$	$\cos x$	$-senx$	$\sec^2 x$	$-\csc^2 x$	$\sec x \tan x$	$\csc x \cot x$

$f(x)$	e^x	e^{ax}	$\ln x$	a^x	$\log_a x$
$f'(x)$	e^x	ae^{ax}	$\dfrac{1}{x}$	$x' a^x \ln a$	$\dfrac{x'}{x \ln a}$

Derivar $f(x)=\dfrac{senx}{1-\cos x}$

$$f'(x)=\frac{(senx)'(1-\cos x)-(senx)(1-\cos x)'}{(1-\cos x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\cos x(1-\cos x)-(senx)(-(-\cos x))}{(1-\cos x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\cos x-\cos^2 x-(senx)(senx)}{(1-\cos x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\cos x-\cos^2 x-sen^2 x}{(1-\cos x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\cos x-(\cos^2 x+sen^2 x)}{(1-\cos x)^2}, \quad \cos^2 x+sen^2 x=1$$

$$f'(x)=\frac{\cos x-1}{(1-\cos x)^2}=\frac{-(1-\cos x)}{(1-\cos x)^2}=-\frac{1}{1-\cos x}$$

Derivar

$f(x)=2^x+\ln x-\tan x+e^{-5x}$

$$f(x)=2^x+\ln x-\tan x+e^{-5x}$$

$$f'(x)=2^x\ln 2+\frac{1}{x}-\sec^2 x-5e^{-5x}$$

Derivar $f(x)=e^x senx$

$$f(x)=e^x senx$$

$$f'(x)=(e^x)'(senx)+(e^x)(senx)'$$

$$f'(x)=e^x senx+e^x\cos x$$

$$f'(x)=e^x(senx+\cos x)$$

2.4 Regla de la cadena: si $y=f(u)$ es una función derivable de "u" y $u=g(x)$ es una función derivable de "x", entonces $y=f(g(x))$ es función derivable de x.

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right), \quad d\left[f(g(x))\right]=f'(g(x))g'(x)\rightarrow \text{función compuesta.}$$

Observación: muchas veces, para derivar una función compuesta, debe aplicarse la regla de la cadena más de una vez.

Fórmulas generalizadas para la variable "U"

$f(x)$	$sen u$	$\cos u$	$\tan u$	$\cot u$	$\sec u$	$\csc u$
$f'(x)$	$u'\cos u$	$-u' sen u$	$u'\sec^2 u$	$-u'\csc^2 u$	$u'\sec u\tan u$	$u'\csc u\cot u$

$f(x)$	e^u	e^{ax}	$\ln u$	a^u	u^n	$\log_a u$
$f'(x)$	$u'e^u$	ae^{ax}	$\frac{u'}{u}$	$u'a^u\ln a$	$nu^{n-1}u'$	$\frac{u'}{u\ln a}$

Derivar $f(x)=(3x+5)^4$

$$f(x)=(3x+5)^4$$
$$f'(x)=4(3x+5)^{4-1}(3x+5)'$$
$$f'(x)=4(3x+5)^3(3)$$
$$f'(x)=12(3x+5)^3$$

Derivar $f(x)=e^{x^2+3}$

$$f(x)=e^{x^2+3}$$
$$f'(x)=\left(x^2+3\right)'e^{x^2+3}$$
$$f'(x)=2xe^{x^2+3}$$

Derivar $f(x)=sen^4(5x-3)$

$$f(x)=sen^4(5x-3)=\left[sen(5x-3)\right]^4$$
$$f'(x)=4sen^3(5x-3)\left[sen(5x-3)\right]'$$
$$f'(x)=4sen^3(5x-3)\left[(5x-3)'\cos(5x-3)\right]$$
$$f'(x)=4sen^3(5x-3)\left[5\cos(5x-3)\right]$$
$$f'(x)=20sen^3(5x-3)\cos(5x-3)$$

Derivar $f(x)=sen^2(\ln x)$

$$f(x)=sen^2(\ln x)=\left[sen(\ln x)\right]^2$$
$$f'(x)=2sen(\ln x)\left[sen(\ln x)\right]'$$
$$f'(x)=2sen(\ln x)\left[(\ln x)\cos(\ln x)\right]$$
$$f'(x)=2sen(\ln x)\left[\frac{1}{x}\cos(\ln x)\right]$$
$$f'(x)=\frac{2}{x}sen(\ln x)\cos(\ln x)$$

2.5 Derivada de orden superior: La derivada de la derivada de una función se conoce como segunda derivada de la función, es decir, si f(x) es una función y existe su primera derivada f´(x), en el caso de que se pueda obtener, la derivada de la función obtenida de aplicar la derivada se le llama segunda derivada:

$f(x)$	Es la función.
$f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)$	Es la derivada de la función.
$f''(x)=\frac{d}{dx}f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)$	Es la derivada de la derivada de la función.

De manera similar se puede obtener las derivadas de mayor orden, sin embargo es necesario aclarar que las derivadas de una función dependen de las características de la función y es posible, y frecuentemente sucede, que algunas derivadas existen pero no para todos los ordenes pese a que se puedan calcular con las formulas. Es necesario considerar los teoremas expuestos en la sección de los teoremas.

Hallar la cuarta derivada de $f(x)=x^5+x^2+1$

Solución:

$$f(x)=x^5+x^2+1$$
$$f'(x)=5x^4+2x$$
$$f''(x)=20x^3+2$$
$$f^{(3)}(x)=60x^2$$
$$f^{(4)}(x)=120x$$

Hallar la tercera derivada de $f(x)=3x^5-4x^4+sen(x)$

Solución:

$$f(x)=3x^5-4x^4+sen(x)$$
$$f'(x)=15x^4-16x^3+\cos(x)$$
$$f''(x)=60x^3-48x^2-sen(x)$$
$$f^{(3)}(x)=180x^2-96x-\cos(x)$$

Hallar la cuarta derivada de

$$f(x)=e^{-2x}+e^{3x}$$

Solución:

$$f(x)=e^{-2x}+e^{3x}$$
$$f'(x)=-2e^{-2x}+3e^{3x}$$
$$f''(x)=4e^{-2x}+9e^{3x}$$
$$f^{(3)}(x)=-8e^{-2x}+27e^{3x}$$
$$f^{(4)}(x)=16e^{-2x}+71e^{3x}$$

2.6 derivación implícita: Es posible derivar una función dada implícitamente sin necesidad de expresarlo explícitamente. El método consiste en derivar los dos miembros de la relación. El procedimiento se conoce como derivación implícita. Se denomina función implícita cuando se da una relación entre "x" y "y" por medio de una ecuación no resuelta para "y", entonces "y" se llama función implícita de "x".

2.7 Pasos para determinar la derivación implícita:

- Derivar ambos lados de la igualdad con respecto a "x".
- Agrupar todos los y' al lado izquierdo de la igualdad.
- Factorizar todos los y' y por último despejar y' y esa será la derivada.

Derivar implícitamente
$y^3+y^2-5y-2x^2=-4$

Solución:

$$3y^2y'+2yy'-5y'-4x=0$$
$$3y^2y'+2yy'-5y'=4x$$
$$y'(3y^2+2y-5)=4x$$
$$y'=\frac{4x}{3y^2+2y-5}$$

Derivar implícitamente
$x^2-2y^2+4y=2$

Solución:

$$2x-4yy'+4y'=0$$
$$y'(-4y+4)=-2x$$
$$y'=\frac{-2x}{-4y+4}$$
$$y'=\frac{-2x}{-2(2y-2)}$$
$$y'=\frac{x}{2y-2}$$

Derivar implícitamente
$xy^2+x^2=x+y+1$

Solución:

$$xy^2+x^2=x+y+1$$
$$y^2+2xyy'+2x=1+y'$$
$$2xyy'-y'=1-2x-y^2$$
$$y'(2xy-1)=1-2x-y^2$$
$$y'=\frac{1-2x-y^2}{2xy-1}$$

Derivar implícitamente
$x^2+y^2=2xy+3x+2$

Solución:

$$2x+2yy'=2y+2xy'+3$$
$$2yy'-2xy'=2y+3-2x$$
$$y'(2y-2x)=2y+3-2x$$
$$y'=\frac{2y-2x+3}{2y-2x}$$

Derivar implícitamente
$3x^2+2y=3x+y^2$

Solución:

$$6x+2y'=3+2yy'$$
$$2y'-2yy'=3-6x$$
$$y'(2-2y)=3-6x$$
$$y'=\frac{3-6x}{2-2y}$$
$$y'=\frac{3-6x}{2-2y}$$

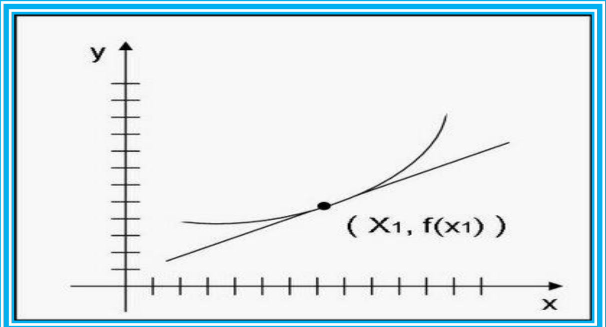
EVALUACIÓN FORMATIVA

Deriva implícitamente las siguientes funciones:

$$4x^2-6y^2=3xy-7x+1,\quad -2x^2+4xy+4y^3=5x^2-2y-3$$
$$2xy^2-8x^2=2x^2-y^3+5,\quad 5y^4-4x^2y^2+2xy=5x-9y-1$$

$$-2x^2+5y^2+3y=-3, \quad -2y^3+3y^2+8y-5x^2=6, \quad 4xy^2-3x^2=2x-y+1$$

2.8 rectas tangentes: La derivada de la función $f(x)$ en el punto "P" es igual a la pendiente de la recta tangente en ese punto. Las coordenadas del punto "P" son $(x_1, f(x_1))$, es decir que el punto "P" forma parte de la gráfica de la función. La pendiente "m" es igual a la tangente del ángulo que forman la función $f(x)$ y la recta tangente. $f'(x_1)=m=\tan\theta$ La ecuación de la recta tangente en el punto "P" es $y=m(x-x_1)+f(x_1)$



Dada la función $f(x)=x^2$

Hallar la ecuación de la recta tangente en el punto $x_1=3$

Solución: calculemos $f(x_1)$

$$f(3)=(3)^2=9$$

Ahora procedemos a derivar la función. $f'(x)=2x$

Evaluamos $x_1=3$, $f'(3)=2(3)=6$

Entonces $m=6$ Luego,

$$y=6(x-3)+9$$
$$y=6x-18+9$$
$$y=6x-9$$

Dada la función $f(x)=2x^3+5x^2-2$

Hallar la ecuación de la recta tangente en el punto $x_1=-2$ Solución: calculemos $f(x_1)$

$$f(-2)=2(-2)^3+5(-2)^2-2$$
$$f(-2)=-16+20-2=20-18=2$$

Ahora procedemos a derivar la función.

$f'(x)=6x^2+10x$ Evaluamos $x_1=-2$,

$$f'(x)=6(-2)^2+10(-2)$$
$$f'(x)=24-20=4$$

Entonces $m=4$ Luego,

$$y=4(x-(-2))+2$$
$$y=4(x+2)+2$$
$$y=4x+8+2=4x+10$$

2.9 Teorema del valor intermedio en las derivadas: sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y su supongamos que $f(a)<f(b)$ entonces para cada valor "z" tal que $f(a)<z<f(b)$ existe un valor "x" dentro del intervalo abierto (a,b) tal que $f(x)=z$ La misma conclusión se obtiene en el caso de que $f(b)<f(a)$ En palabras más simples, según el teorema del valor intermedio, si una función f es continua en un dominio y tiene un valor máximo "*m*" y un valor mínimo "*n*", la función f toma todos los valores intermedios entre *m y n.*

Si consideramos la función $f(x)=x^2-1$ en el intervalo $[-2,2]$ observamos que:

χ	-2	-1	0	1	2
$f(\chi)$	3	0	-1	0	3

Se observa claramente que los puntos $(2,3),(-2,3)$ son valores máximos de la función y que $(0,-1)$ es un punto mínimo.

2.10 Los ceros de una función: corresponde a las raíces de la función, donde su gráfica toma el valor de "0", es decir que la gráfica intercepta al eje "x". En muchas ocasiones para determinar los ceros de la función es necesario aplicar algunos métodos de factorización.

Hallar los ceros de la función

$$f(x)=x^2-9$$

Solución:

$$x^2-9=0$$

$$x^2-9=(x+3)(x-3)=0$$

$$\Rightarrow x+3=0,\quad x-3=0$$

$$\Rightarrow x=-3,\quad x=3$$

Hallar los ceros de la función $f(x)=\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{4}{x-2}$

Solución:

$$\frac{3}{x-1}+\frac{4}{x-2}=0\Rightarrow\frac{3}{x-1}=-\frac{4}{x-2}$$

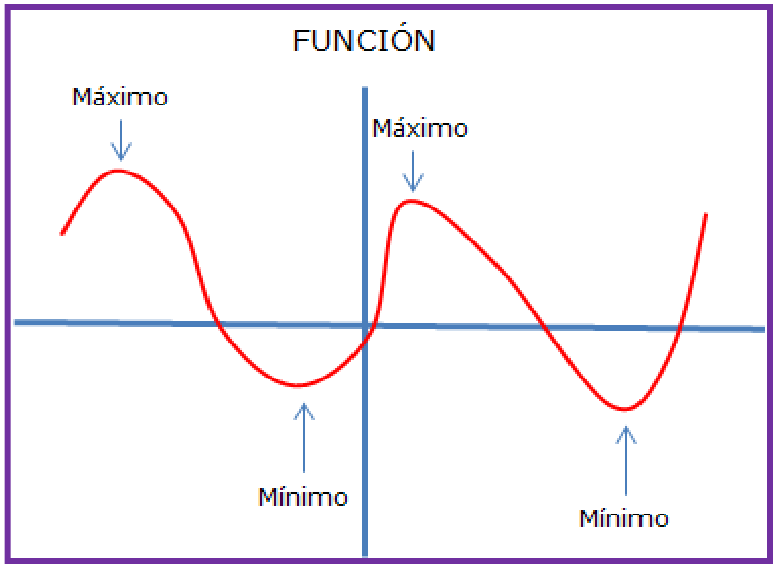
$$3(x-2)=-4(x-1)$$

$$3x-6=-4x+4$$

$$3x+4x=4+6$$

$$7x=10\Rightarrow x=\frac{10}{7}$$

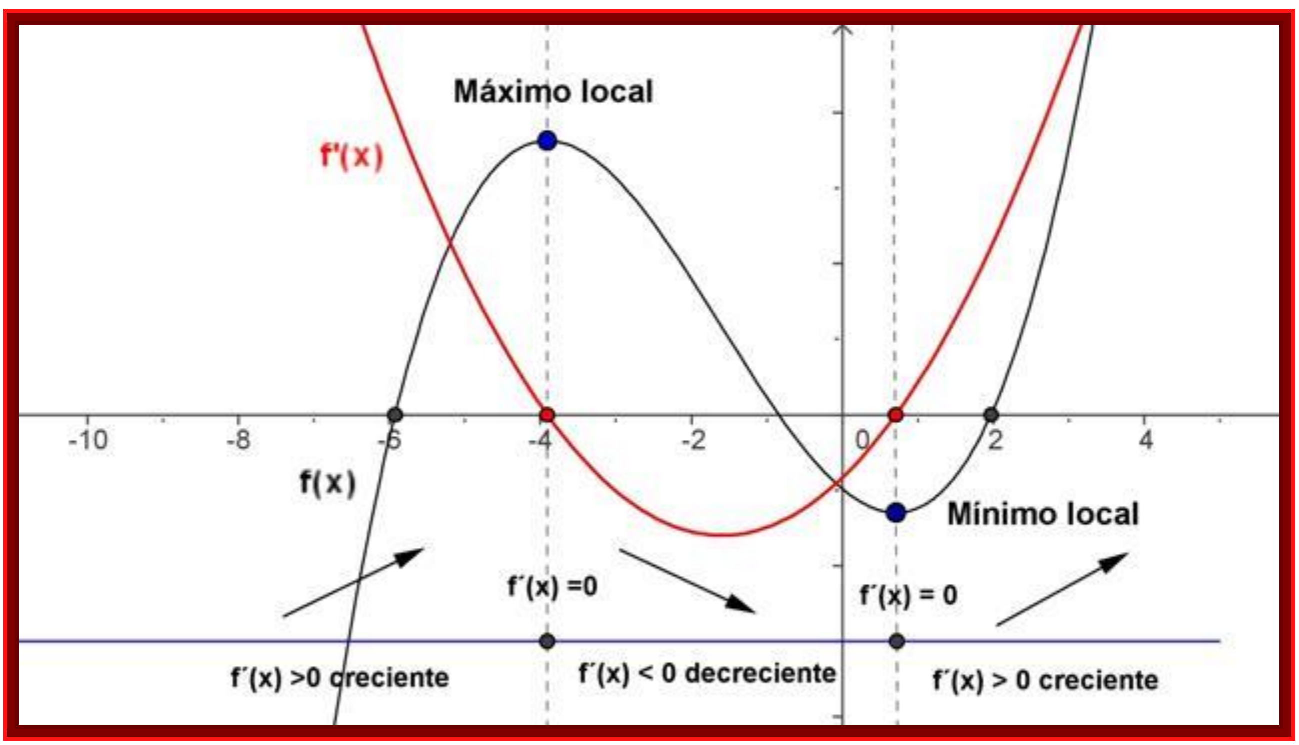
2.11 máximos y mínimos: la función $y=f(x)$ tiene un *máximo relativo* en $x=c$ si existe un intervalo abierto (a,b) que contiene a "c" tal que $f(c)\geq f(x),\quad \forall x\in(a,b)$. La función $y=f(x)$ tiene un *mínimo relativo* en $x=c$ si existe un intervalo abierto (a,b) que contiene a "c" tal que $f(c) \leq f(x), \quad \forall x \in (a,b)$



Teorema: Si $y = f(x)$ es continua para todos los valores de "x" en un intervalo abierto (a,b) y tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) en $x = c$ donde $c \in (a,b)$ entonces $f'(c) = 0$ "o" f´(c) no existe.

El recíproco de este teorema es falso. En general los valores de "x" para los cuales $f'(c) = 0$ "o" f´(c) no existe se denominan valores críticos de la función.

2.12 Funciones crecientes y decrecientes: Si $f(x)$ es mayor que cero en un intervalo "I" para todo valor $x \in I$ entonces $f(x)$ es creciente en ese intervalo. Si $f(x)$ es mayor que cero en un intervalo "I" para todo valor $x \in I$ entonces $f(x)$ es decreciente en ese intervalo.

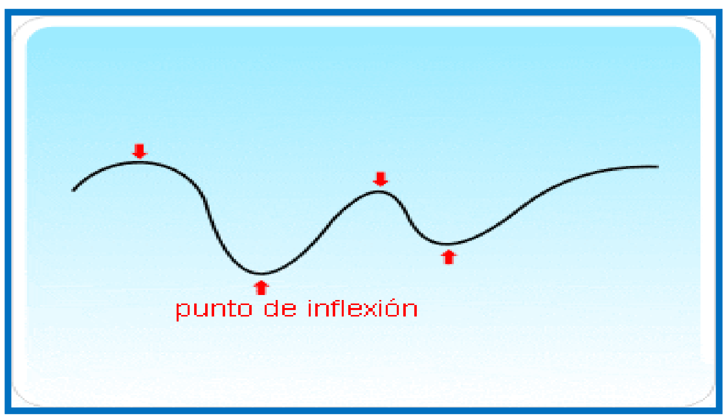


Propiedad: Sea f una función derivable en un intervalo $[a,b]$

- Si $f'(x) > 0$ para todo "x" en (a,b) entonces f es creciente en (a,b)
- Si $f'(x) < 0$ para todo "x" en (a,b) entonces f es decreciente en (a,b)
- Si $f'(x) = 0$ para todo "x" en (a,b) entonces f es constante en (a,b)

2.13 Criterio de la primera derivada para máximos y mínimos: Supongamos que f es continua en el intervalo (a,b) y que "c" es el único valor crítico de f en (a,b) entonces:

- Decimos que existe un máximo relativo en $x = c$ si antes de "c" la función es creciente y después de "c" la función es decreciente. Es decir si $f'(x)$ pasa de positivo a negativo.
- Decimos que existe un mínimo relativo en $x = c$ si antes de "c" la función es decreciente y después de "c" la función es creciente. Es decir si $f'(x)$ pasa de negativo a positivo.
- Si no hay cambios de signo en la primera derivada antes y después del valor crítico, entonces la función f tiene un punto de inflexión en $x = c$. Un punto de inflexión es aquel en el cual la gráfica de la función hace un zig zag.

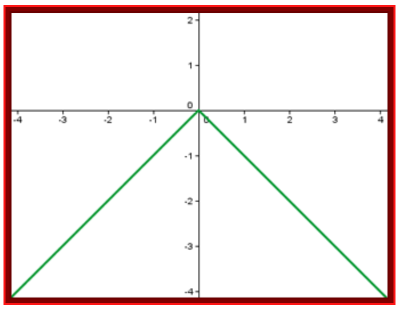


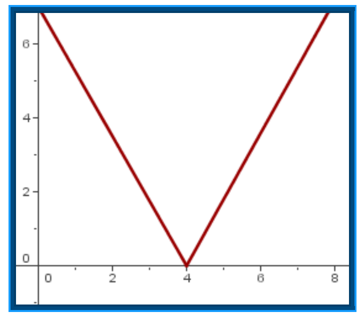
Pasos para encontrar los máximos y los mínimos de una función:

- Encontrar la derivada de f.
- Determinar los valores críticos (donde la derivada es igual a cero o donde la derivada no existe).
- Con los valores críticos formamos intervalos abiertos. Cuyos extremos sean dichos valores críticos.
- Determinamos el signo de $f'(x)$ en cada uno de los intervalos.

- Finalmente, determinamos de acuerdo con la variación de los signos, si los valores son máximos o mínimos relativos.

Observación: Una función tiene su máximo absoluto en el x = a si la ordenada es mayor o igual que en cualquier otro punto del dominio de la función. Una función tiene su mínimo absoluto en el x = b si la ordenada es menor o igual que en cualquier otro punto del dominio de la función.





2.14 Concavidad hacia arriba y hacia abajo: Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo "I", se dice que $f(x)$ es cóncava hacia arriba en dicho intervalo si $f'(x) > 0$ para cualquier "x" elemento del intervalo. Se dice que $f(x)$ es cóncava hacia abajo en dicho intervalo si $f'(x) < 0$ para cualquier "x" elemento del intervalo.

Ejemplo: Trazar la gráfica de $f(x) = x^3 - 27x + 4$ determine su dominio, codominio, construya la gráfica, los máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y concavidad.

Solución:

Dominio: R, Codominio R.

Puntos críticos. Son aquellos puntos para los cuales la derivada es cero ó no existe, veamos:

$$f(x) = x^3 - 27x + 4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 27$$

$$3x^2 - 27 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 27 \Rightarrow x^2 = \frac{27}{3} \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

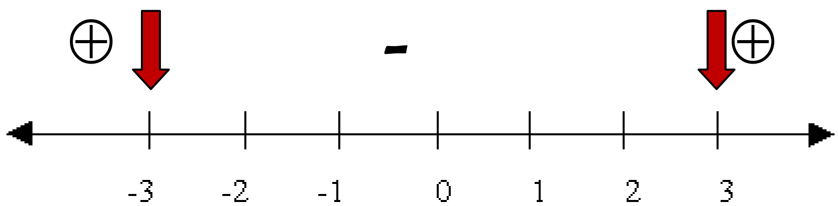
Luego, $x = 3, \quad x = -3$

Analicemos estos valores para ver si son máximos o mínimos. Para esto debemos sustituir en la primera derivada valores que estén a la derecha y a la izquierda de dichos números críticos. Estos valores se eligen de forma arbitraria, seleccionaremos el -4, el -1 y el 5, no nos interesa el valor que resultará al sustituir, solamente nos interesa el signo de los valores resultantes.

$$f'(-4) = 3(-4)^2 - 27 = 3(16) - 27 = 48 - 27 = 21 \rightarrow \oplus$$

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 27 = 3(1) - 27 = 3 - 27 = -24 \rightarrow -$$

$$f'(-4) = 3(5)^2 - 27 = 3(25) - 27 = 75 - 27 = 48 \rightarrow \oplus$$



Ahora vamos a determinar la imagen de cada uno de los valores críticos, para esto recurrimos a la función original.

$$f(3) = (3)^3 - 27(3) + 4 = 27 - 81 + 4 = -50$$

$$f(-3) = (-3)^3 - 27(-3) + 4 = -27 + 81 + 4 = 58$$

De donde se forman las parejas de puntos $(3,-50)$, $(-3,-58)$

Con la ayuda de la recta real podemos deducir que la función crece en los intervalos $(-\infty,-3]$, $[3,+\infty)$ y decrece $(-3,3)$ Recuerde que Una función $f(x)$ es creciente en un intervalo I (donde es continua) si $f'(x) > 0$ para cualquier *x* del intervalo I y es decreciente si $f'(x) < 0$

Intervalos de concavidad. Para esta operación debemos encontrar primero la segunda derivada y luego analizamos el signo de $f''(x)$

$$f'(x) = 3x^2 - 27$$

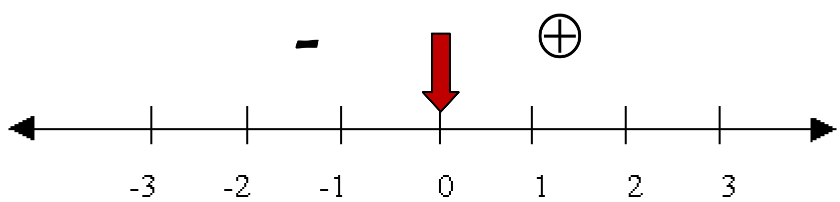
$$f''(x) = 6x$$

Luego igualamos la derivada a cero. $6x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{6} = 0$

Analicemos este valor para determinar los intervalos de concavidad. Para esto debemos sustituir en la segunda derivada valores que estén a la derecha y a la izquierda de dicho número. Estos valores se eligen de forma arbitraria, seleccionaremos el -2, y el 3, no nos interesa el valor que resultará al sustituir, solamente nos interesa el signo de los valores resultantes.

$$f''(-2) = 6(-2) = -12 \rightarrow -$$

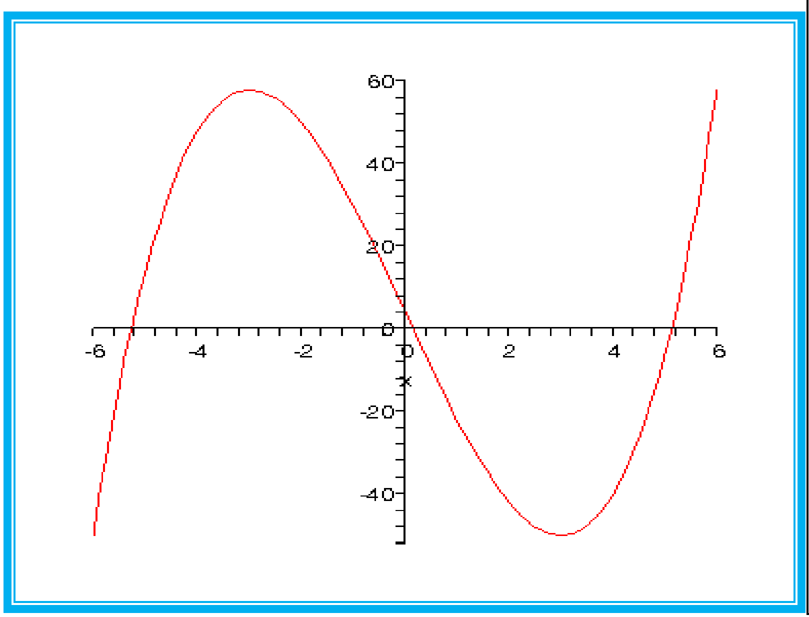
$$f''(3) = 6(3) = 18 \rightarrow +$$



La gráfica de f es cóncava hacia abajo en $(-\infty,0)$. La gráfica de f es cóncava hacia arriba en $(0,+\infty)$

Puntos de inflexión: Los puntos de inflexión son aquellos donde cambia la *concavidad.* $x = 0$ es un punto de inflexión pues allí la gráfica cambia su concavidad, en este caso de creciente a decreciente.

Gráfica



EVALUACIÓN FORMATIVA

Dadas las siguientes funciones determina su dominio, codominio, traza la gráfica, determina sus máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento y su concavidad.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$$

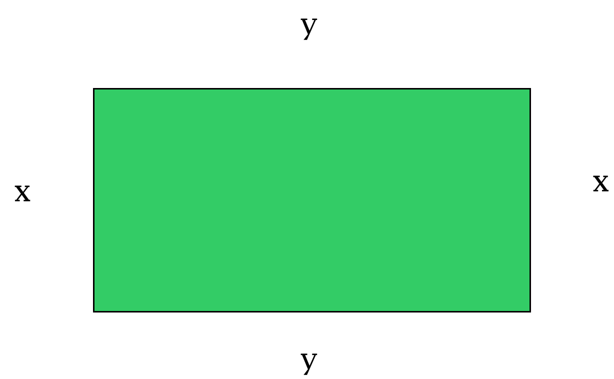
$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 9$$

Problemas de optimización utilizando la derivada: Un problema de optimización consiste en minimizar o maximizar el valor de una variable. En otras palabras se trata de calcular o determinar el valor mínimo o el valor máximo de una función de una variable. Se debe tener presente que la variable que se desea minimizar o maximizar debe ser expresada como función de otra de las variables relacionadas en el problema.

En ocasiones es preciso considerar las restricciones que se tengan en el problema, ya que éstas generan igualdades entre las variables que permiten la obtención de la función de una variable que se quiere minimizar o maximizar. En este tipo de problemas se debe contestar correctamente las siguientes preguntas:
_ ¿Qué se solicita en el problema?
_ ¿Qué restricciones aparecen en el problema?

La respuesta correcta a la primera pregunta nos lleva a definir la función que deberá ser minimizada o maximizada. La respuesta correcta a la segunda pregunta dará origen a (al menos) una ecuación que será auxiliar para lograr expresar a la función deseada precisamente como una función de una variable.

Ejemplo: ¿Qué longitud y anchura debe tener un rectángulo de 100 pies de perímetro para que su área sea máxima?



$$Perimetro = x + x + y + y \Rightarrow P = 2x + 2y$$

$$Area = yx$$

$$2x + 2y = 100 \Rightarrow 2(x + y) = 100 \Rightarrow x + y = \frac{100}{2} \Rightarrow y = 50 - x$$

Reemplazamos este valor en el área

$$A = yx \Rightarrow A = (50 - x)x \Rightarrow A = 50x - x^2$$

Ahora derivamos $A = 50x - x^2 \Rightarrow A' = 50 - 2x$

Buscamos los números críticos,

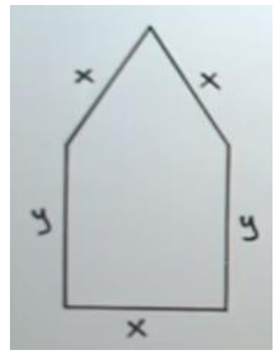
Como $x + y = 50 \Rightarrow y = 50 - x \Rightarrow y = 50 - 25 \Rightarrow y = 25$

$$A = xy \Rightarrow A = (25)(25) = 625$$

Respuesta: tanto el largo como el ancho deben medir 25 pies.

EVALUACIÓN FORMATIVA

1) Una ventana tiene forma de un rectángulo coronado por un triángulo equilátero. Encuentre las dimensiones del rectángulo para que la ventana permita la máxima entrada de luz (espacio, área), si el perímetro de la misma debe ser 12 metros.



Recuerde que el perímetro de una figura plana se obtiene sumando las longitudes de sus lados, el área de un rectángulo es igual al producto de dos de sus lados contiguos y el área de un triángulo equilátero $A = \frac{\sqrt{3}}{4}(\text{longitud de un lado})^2$

2) El costo total en miles de dólares de pedido y almacenaje de "x" automóviles es: $C(x) = 4x + 720 + 921600x^{-1}$ Determine el tamaño del pedido que minimiza el costo total de la producción.

3) Una caja con tapa y base cuadrada debe tener un volumen de $80cm^3$ el precio del material utilizado para la base es de B/.3.00 por centímetro cuadrado y el utilizado para los lados y la tapa es de B/.2.00 calcular las dimensiones de la caja para que resulte lo más económico posible.

UNIDAD DE APRENDIZAJE #3

(LA INTEGRAL INDEFINIDA)

Competencia: Resuelve problemas relacionados con la integral indefinida y las técnicas de integración, mediante algoritmos establecidos.

3. La Integral Indefinida: Una función $F(x)$ cuya derivada en un cierto punto "x" es $F'(x) = f(x)$ decimos que $F(x)$ es la primitiva e integral indefinida de $f(x)$. La integral indefinida de una función no es única.

Ejemplo: x^2, x^2+5, x^2-4 son las primitivas o integrales indefinidas de la función $f(x) = 2x$.

3.1 Fórmulas fundamentales de integración: Algunas de las expresiones que figuran a continuación se deducen de forma inmediata de las fórmulas o reglas de derivación. El símbolo utilizado para las integrales es $\int$

TABLA DE LAS FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN MÁS UTILIZADAS

1	$\int dx = x + c$	2	$\int kdx = kx + c \quad ,k \neq 0$	3	$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
4	$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$			5	$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$
6	$\int [f(x)-g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$			7	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c, \quad x \neq 0$
8	$\int senxdx = -\cos x + c$	9	$\int \cos xdx = senx + c$	10	$\int \tan xdx = -\ln\lvert \sec x\rvert + c$

11	$\int \cot x dx = \ln\lvert \text{se}\, nx \rvert + c$	12	$\int \sec x dx = \ln\lvert \sec x + \tan x \rvert + c$		
13	$\int \csc x dx = \ln\lvert \csc x - \cot x \rvert + c$			14	$\int \sec^2 x dx = \tan x + c$
15	$\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$	16	$\int \cos^2 x dx = -\cot x + c$	17	$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$
18	$\int e^x dx = e^x + c$	19	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a \neq o$	20	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = sen^{-1} x + c$
21	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$	22	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}\lvert x \rvert + c$	23	$D_x \int f(x) dx = f(x)$
24	$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$				

3.2 Cálculo de Primitivas: Determinar las primitivas de una función $f(x)$, implica determinar las funciones $F(x)$ que al derivarlas dan como resultado $f(x)$.

<u>Ejemplo:</u> Calcular $\int 3dx$ <u>Solución:</u> $\int 3dx = 3x + c$

<u>Ejemplo:</u> Calcular $\int 5x^3 dx$ <u>Solución:</u> $\int 5x^3 dx = 5\int x^3 dx = \frac{5x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{5x^4}{4} + c$

<u>Ejemplo:</u> Calcular $\int \frac{dx}{x^5}$ <u>Solución:</u> $\int \frac{dx}{x^5} = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + c = -\frac{x^{-4}}{4} + c = -\frac{1}{4x^4} + c$

<u>Ejemplo:</u> Calcular $\int \frac{7}{x^3} dx$ <u>Solución:</u> $\int \frac{7}{x^3} dx = \int 7x^{-3} dx = \frac{7x^{-3+1}}{-3+1} + c = -\frac{7}{2} x^{-2} + c = -\frac{7}{2x^2} + c$

<u>Ejemplo:</u> Calcular $\int \frac{-2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

Solución: $$\int \frac{-2}{\sqrt[3]{x^2}}dx = -2\int \frac{dx}{x^{2/3}} = -2\int x^{-2/3}dx = \frac{-2x^{(-2/3)+1}}{-\frac{2}{3}+1} + c = \frac{-2x^{1/3}}{1/3} + c = -6\sqrt[3]{x} + c$$

Ejemplo: Calcular $\int \left(2x^3 - 3x + 5 - 2\cos x\right)dx$

Solución:
$$\int \left(2x^3 - 3x + 5 - 2\cos x\right)dx = \int 2x^3dx - \int 3xdx + \int 5dx - \int 2\cos xdx$$
$$= \frac{2x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 5x - 2senx + c$$
$$= \frac{x^4}{2} - \frac{3x^2}{2} + 5x - 2senx + c$$

Ejemplo: Calcular $\int \left(\frac{x^2+2}{x}\right)dx$

Solución:
$$\int \left(\frac{x^2+2}{x}\right)dx = \int \frac{x^2}{x}dx + \int \frac{2}{x}dx$$
$$= \int xdx + 2\int \frac{dx}{x}$$
$$= \frac{x^2}{2} + 2\ln|x| + c$$

EVALUACIÓN FORMATIVA

Calcula las siguientes integrales:

$$\int -7dx,\quad \int 8x^4dx,\quad \int \frac{9}{\sqrt[5]{x^3}}dx,\quad \int \left(\tan x - 6x^4 + 12x - 9 + \frac{2x^3}{5}\right)dx,\quad \int \left(\frac{-10x + 3x^2 - 7x^3}{x^2}\right)dx$$

$$\int \frac{-3}{\sqrt[4]{x^3}}dx,\quad \int \left(e^{2x} + \cos + \frac{3}{4} - 5x^2\right)dx,\quad \int \left(\frac{3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x}{x^3}\right)dx,\quad \int \left(6x^7 - \frac{2}{5}x^5 + 7x^4 + \sqrt{3}\right)dx$$

MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

3.3 Integración por cambio de variable o sustitución simple: Muchas integrales no pueden obtenerse directamente a partir de las fórmulas de integración, pero si se pueden calcular haciendo un cambio de variables o sustitución adecuada.

3.4 Teorema de cambio de variable: Si $u = g(x)$ es una función de x y F es una antiderivada de f, entonces

$$\boxed{\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + c = F(g(x)) + c}$$

Usando la regla de la cadena para integrales, podemos generalizar todas las fórmulas de integración vistas anteriormente cuando $u = g(x)$

Observación: al momento de hacer el cambio de variable se debe hacer "u" igual a la función que al derivarla obtengamos una expresión similar a la otra función.

Ejemplo: Calcule la siguiente integral $\int (x^2+1)^2 (2x)\,dx$

Solución: Sea $u = x^2 + 1$, entonces derivando obtenemos; $du = 2xdx$

Ahora sustituimos y obtenemos la siguiente integral:

$$\int (x^2+1)^2 (2x)\,dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{(x^2+1)^3}{3} + c$$

Calcule la siguiente integral: $\int 5\cos(5x)dx$

Solución: Sea $u = 5x$, entonces derivando obtenemos; $du = 5dx$

Ahora sustituimos y obtenemos la siguiente integral:

$$\int 5\cos(5x)dx = \int \cos(u)du = sen(u) + c = sen(5x) + c$$

Calcule la siguiente integral: $\int x\left(x^2+1\right)^2 dx$

Solución: Sea $u = x^2 + 1$, entonces derivando obtenemos;

$du = 2xdx \Rightarrow \dfrac{du}{2} = xdx$ Ahora sustituimos y obtenemos la siguiente integral:

$$\int x\left(x^2+1\right)^2 dx = \int \frac{u^2}{2}du = \frac{1}{2}\int u^2 du = \frac{1}{2}\left(\frac{u^3}{3}\right) + c = \frac{\left(x^2+1\right)^3}{6} + c$$

Calcule la siguiente integral: $\int \sqrt{2x-1}dx$

Solución: Sea $u = 2x-1$,

Entonces derivando obtenemos; $du = 2dx \Rightarrow \dfrac{du}{2} = dx$

Ahora sustituimos y obtenemos la siguiente integral:

$$\int \sqrt{2x-1}dx = \int \frac{\sqrt{u}}{2}du = \frac{1}{2}\int u^{1/2}du = \frac{1}{2}\left(\frac{u^{3/2}}{3/2}\right) + c = \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{u^3}}{3}\right) + c = \frac{\sqrt{(2x-1)^3}}{3} + c$$

Calcular la siguiente integral: $\int 5x\sqrt[3]{1+x^2}dx$

Solución: Sea $u = 1 + x^2$,

Entonces derivando obtenemos; $du = 2xdx \Rightarrow \dfrac{du}{2} = xdx$

Ahora sustituimos y obtenemos la siguiente integral:

$$\int 5x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx = 5\int x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx = 5\int u^{1/3}\frac{du}{2} = \frac{5}{2}\int u^{1/3}du = \frac{5}{2}\left(\frac{u^{4/3}}{4/3}\right)+c$$

$$= \frac{5}{2}\left(\frac{3}{4}\left(1+x^2\right)^{4/3}\right)+c = \frac{15}{8}\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^4}\ +c$$

Calcular la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{x^2}{\left(1+x^3\right)^2}dx$

<u>*Solución:*</u> Sea $u = 1+x^3$, entonces derivando obtenemos; $du = 3x^2dx \Rightarrow \dfrac{du}{3} = x^2dx$

Ahora sustituimos y obtenemos la siguiente integral:

$$\int \frac{x^2}{\left(1+x^3\right)^2}dx = \int \frac{1/3du}{u^2} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{3}\int u^{-2}du = \frac{1}{3}\left(\frac{u^{-1}}{-1}\right)+c = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{u}\right)+c = -\frac{1}{3\left(1+x^3\right)}+c$$

EVALUACIÓN FORMATIVA

Indicaciones: Calcular las siguientes integrales.

$$\int\left(4x^2+3\right)^2xdx,\quad \int\frac{dx}{x+4},\quad \int x^4\sqrt{x^5-4}\,dx,\quad \int\frac{xdx}{\sqrt{1-9x^2}},\quad \int x^2\left(x^3-1\right)dx$$

$$\int x\left(x^2-1\right)dx,\quad \int\frac{4x}{\sqrt{1+x^2}}dx,\quad \int\frac{dx}{(3x)^2},\quad \int sen(2x)dx$$

$$\int\frac{2x-1}{\sqrt{x+3}}dx,\quad \int\frac{x^2-1}{\sqrt{2x-1}}dx,\quad \int x^3\sqrt{x+2}\,dx,\quad \int x\sqrt[3]{x+1}\,dx,\quad \int\frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx$$

$$\int(x+1)\sqrt{2-x}\,dx,\quad \int sen(2x)dx,\quad \int xsen\left(x^2\right)dx,\quad \int x\cos\left(x^2\right)dx$$

$$\int\cos(6x)dx,\quad \int\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)dx,\quad \int sen(2x)\cos(2x)dx,\quad \int\frac{\csc^2 x}{\cot^3 x}dx,\quad \int\sqrt{3x-5}\,dx$$

$$\int(2x+1)^5dx,\quad \int sen^3x\cos xdx,\quad \int\tan^2x\sec^2xdx,\quad \int x\sqrt{x^2+4}\,dx,\quad \int\frac{x^2}{x^3-1}dx$$

EVALUACIÓN SUMATIVA

Calcular las siguientes integrales aplicando el teorema de cambio de variable.

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx,\quad \int 5x\sqrt{1+x^2}\,dx,\quad \int 2x\left(x^2-9\right)^{13}dx,\quad \int 7\cos(4x)dx,\quad \int 3x\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$\int x^2\sqrt{1-x}\,dx \qquad \int sen^4 x\cos dx$$

EVALUACIÓN DEL CURSO

Exámenes Parciales (3) 30% (10% cada uno)

Talleres grupales presenciales (5) 20% (4% cada uno)

Exposiciones de problemas resueltos (2) 10% (5% cada una)

Proyecto (1) 10%

***Examen final (1) 30%**

* Dentro del 30% se incluirá un 10% que corresponde a un portafolio de todos los problemas propuestos de todo el curso, debidamente desarrollados paso a paso.

BIBLIOGRAFÍA

- García, A. y García, F., Gutierrez, A. TEORÍA Y PROBLEMAS DE ANÁLISIS MATEMÁTICO EN UNA VARIABLE. Clagsa, 1993.
- Smith, R y Minton, R. CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL. Mc Graw Hill, 2003
- Leithold, L. EL CÁLCULO CON GEOMETRÍA ANALÍTICA Harla, 1987
- Purcell, Edwin J. y Varberg Dale. CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL. Prentice Hall, 1993
- Pita Ruíz,Claudio. CÁLCULO DE UNA VARIABLE. Prentice Hall, 1998.
- Larson - Hostetler. MATEMÁTICA 6. Mac Graw Hill, 1989
- Bradley, L. Cálculo DE UNA VARIABLE. (VOL. I) Y CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES (VOL II). Prentice Hall. 1996